Theorie der Informatik

5. Prädikatenlogik II

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

5. März 2014

Freie und gebundene Variablen

Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von α sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4(\mathsf{R}(x_4, x_2) \lor (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \lor \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?

Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von α sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4 (\mathsf{R}(x_4, x_2) \vee (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?
- $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_5)$, $\alpha(x_6)$, $\alpha(x_7)$, ... sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.

Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von α sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4(\mathsf{R}(x_4, x_2) \lor (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \lor \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?
- $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_5)$, $\alpha(x_6)$, $\alpha(x_7)$, ... sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.
- $\alpha(x_4)$ ist auch nicht relevant: Die Variable kommt zwar in der Formel vor, aber alle Vorkommen sind von einem umgebenden Quantor gebunden.

Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von α sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4 (\mathsf{R}(x_4, x_2) \vee (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?
- $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_5)$, $\alpha(x_6)$, $\alpha(x_7)$, ... sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.
- $\alpha(x_4)$ ist auch nicht relevant: Die Variable kommt zwar in der Formel vor, aber alle Vorkommen sind von einem umgebenden Quantor gebunden.
- $\rightsquigarrow$ nur Zuweisungen für freie Variablen x_2 und x_3 relevant

Variablen eines Terms

Definition (Variablen eines Terms)

Sei t ein Term. Die Menge der in t vorkommenden Variablen, geschrieben $var(t)$, ist folgendermassen definiert:

- $var(x) = \{x\}$
  für Variablensymbole x
- $var(\mathrm{k}) = \emptyset$
  für Konstantensymbole k
- $var(\mathrm{f}(t_1, \dots, t_l)) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_l)$
  für Funktionsterme

Terminologie: Ein Term t mit $var(t) = \emptyset$ heisst Grundterm.

Beispiel: $var(\mathrm{produkt}(x, \mathrm{summe}(\mathrm{k}, y))) =$

Freie und gebundene Variablen einer Formel

Definition (Freie Variablen)

Sei φ eine logische Formel. Die Menge der freien Variables von φ, geschrieben $\mathit{frei}(\varphi)$, ist folgendermassen definiert:

- $\mathit{frei}(\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)) = \mathit{var}(t_1) \cup \dots \cup \mathit{var}(t_k)$
- $\mathit{frei}((t_1 = t_2)) = \mathit{var}(t_1) \cup \mathit{var}(t_2)$
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) = \mathit{frei}(\varphi)$
- $\mathit{frei}((\varphi \wedge \psi)) = \mathit{frei}((\varphi \vee \psi)) = \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$
- $\mathit{frei}(\forall x\, \varphi) = \mathit{frei}(\exists x\, \varphi) = \mathit{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

Beispiel: $\mathit{frei}((\forall x_4(\mathrm{R}(x_4, x_2) \vee (\mathrm{f}(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 \mathrm{S}(x_3, x_2)))$

$=$

Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei φ eine Formel und seien α und β Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen x von φ. Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei φ eine Formel und seien α und β Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen x von φ. Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

Insbesondere ist α vollkommen irrelevant, wenn $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$.

Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei φ eine Formel und seien α und β Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen x von φ. Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

Insbesondere ist α vollkommen irrelevant, wenn $frei(\varphi) = \emptyset$.

Definition (Geschlossene Formeln/Sätze)

Eine Formel φ ohne freie Variablen (d. h., $frei(\varphi) = \emptyset$) wird geschlossene Formel oder Satz genannt.

Wenn φ ein Satz ist, dann schreiben wir oft $\mathcal{I} \models \varphi$ statt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$, da die Definition von α nicht beeinflusst, ob φ unter $\mathcal{I}$ und α wahr ist oder nicht.

Formeln mit mindestens einer freien Variablen heissen offen.

Geschlossene Formeln: Beispiele

Frage: Welche der folgenden Formeln sind Sätze?

- $(\text{Block}(\text{b}) \lor \neg\text{Block}(\text{b}))$
- $(\text{Block}(x) \to (\text{Block}(x) \lor \neg\text{Block}(y)))$
- $(\text{Block}(\text{a}) \land \text{Block}(\text{b}))$
- $\forall x(\text{Block}(x) \to \text{Red}(x))$

Quiz

Fragen

Fragen?

Eigenschaften von Formeln und Formelmengen

Terminologie für Formeln

Die Terminologie, die wir für die Aussagenlogik eingeführt haben, gilt analog für die Prädikatenlogik:

- Interpretation $\mathcal{I}$ und Variablenzuweisung α bilden ein Modell der Formel φ, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$.
- Formel φ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$.
- Formel φ ist falsifizierbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$
- Formel φ ist gültig, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für alle $\mathcal{I}, \alpha$
- Formel φ ist unerfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$ für alle $\mathcal{I}, \alpha$
- Formel φ impliziert Formula ψ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn alle Modelle von φ Modelle von ψ sind.
- Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn sie die gleichen Modelle haben (äquivalent: wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$).

Formelmengen: Semantik

Definition (Formelmenge ist erfüllt oder wahr)

Sei $\mathcal{S}$ eine Signatur, Φ eine Menge von Formeln über $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$ und α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und das Universum von $\mathcal{I}$.

Wir sagen, dass $\mathcal{I}$ und α die Menge Φ erfüllen (auch: Φ ist wahr unter $\mathcal{I}$ und α), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Terminologie für Formelmengen und Sätze

- Die Konzepte der vorherigen Folie gelten analog für Formelmengen.
  Beispiele:
  - Formelmenge Φ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$
  - Formelmenge Φ impliziert Formel ψ, geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von Φ Modelle von ψ sind.
  - Formelmenge Φ impliziert Formelmenge Ψ, geschrieben $\Phi \models \Psi$,
    wenn alle Modelle von Φ Modelle von Ψ sind.

Terminologie für Formelmengen und Sätze

- Die Konzepte der vorherigen Folie gelten analog für Formelmengen.
  Beispiele:
  - Formelmenge Φ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$
  - Formelmenge Φ impliziert Formel ψ, geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von Φ Modelle von ψ sind.
  - Formelmenge Φ impliziert Formelmenge Ψ, geschrieben $\Phi \models \Psi$,
    wenn alle Modelle von Φ Modelle von Ψ sind.
- Alle Konzepte können als Spezialfall auf Sätze (oder Mengen von Sätzen) angewandt werden. In diesem Fall lassen wir α normalerweise weg.
  Beispiele:
  - Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Modell eines Satzes φ, wenn $\mathcal{I} \models \varphi$.
  - Satz φ ist unerfüllbar, wenn $\mathcal{I} \not\models \varphi$ für alle $\mathcal{I}$.

Quiz

Fragen

Fragen?

Weitere Themen

Ausblick

Basierend auf diesen Definitionen, könnten wir dieselben Themen wie bei der Aussagenlogik behandeln:

- wichtige logische Äquivalenzen
- Normalformen
- Folgerungstheoreme (Deduktionstheorem etc.)
- Kalküle
- (prädikatenlogische) Resolution

Wir stellen kurz einige grundlegende Ergebnise zu diesen Themen vor, werden sie aber nicht detailliert behandeln.

Logische Äquivalenzen

- Alle logischen Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten auch in der Prädikatenlogik (z. B., $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$).
- Zudem gelten folgende Äquivalenzen und Folgerungen:

$$
\begin{aligned}
(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) && \\
(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) &\models \forall x(\varphi \vee \psi) && \text{aber nicht umgekehrt} \\
(\forall x\varphi \wedge \psi) &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
(\forall x\varphi \vee \psi) &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
\neg\forall x\varphi &\equiv \exists x\neg\varphi && \\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\equiv (\exists x\varphi \vee \exists x\psi) && \\
\exists x(\varphi \wedge \psi) &\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) && \text{aber nicht umgekehrt} \\
(\exists x\varphi \vee \psi) &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
(\exists x\varphi \wedge \psi) &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
\neg\exists x\varphi &\equiv \forall x\neg\varphi &&
\end{aligned}
$$

Normalformen

Analog zur DNF und KNF für Aussagenlogik gibt es verschiedene relevante Normalformen für Prädikatenlogik, wie z.B.

- Negationsnormalform (NNF):
  Negationssymbole ($\neg$) dürfen nur vor Atomen vorkommen.
- Pränexnormalform:
  Quantoren müssen den äussersten Teil der Formel bilden.
- Skolemnormalform:
  Pränexnormalform ohne Existenzquantoren

Effiziente Verfahren transformieren Formel φ

- in eine äquivalente Formel in Negationsnormalform,
- in eine äquivalente Formel in Pränexnormalform, oder
- in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform.

Ableitung, Beweissysteme, Resolution,...

- Das Deduktionstheorem, Kontrapositionstheorem und das Widerlegungstheorem gelten auch für Prädikatenlogik.
- Es gibt korrekte und vollständige Beweissysteme (Kalküle) für Prädikatenlogik.
- Resolution kann mit dem Konzept der Unifizierung auf Prädikatenlogik erweitert werden.
- Prädikatenlogische Resolution ist widerlegungsvollständig und ergibt somit mit dem Widerlegungstheorem ein allgemeines Schlussfolgerungsverfahren.
- Allerdings terminiert der Algorithmus nicht auf allen Eingaben.

Quiz

Fragen

Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Prädikatenlogik ist ausdrucksmächtiger als Aussagenlogik und erlaubt Schlussfolgerungen über Objekte und ihre Eigenschaften.
- Objekte werden durch Terme beschrieben, die aus Variablen-, Konstanten- und Funktionssymbolen zusammengesetzt sind.
- Eigenschaften und Zusammenhänge werden von Formeln beschrieben, die aus Prädikaten, Quantoren und den üblichen logischen Operatoren zusammengesetzt sind.
- Wie bei allen Logiken analysieren wir
  - Syntax: Was ist eine Formel?
  - Semantik: Wie interpretieren wir eine Formel?
  - Schlussfolgerungsmethoden: Wie können wir logische Konsequenzen aus einer Wissensbasis zeigen?

Weitere Logiken

- Wir haben Prädikatenlogik der ersten Stufe betrachtet.
- Prädikatenlogik der zweiten Stufe erlaubt zum Beispiel Quantifizierung über Prädikatsymbole.
- Es gibt Zwischenstufen, z.B. Monadische Logik zweiter Stufe (alle Prädikatsymbole haben Stelligkeit 1)
- Modallogiken haben neue Operatoren $\Box$ und $\Diamond$
  - Klassische Bedeutung: $\Box\varphi$ für „φ ist notwendig“,
    $\Diamond\varphi$ für „φ ist möglich“.
  - Temporallogik: $\Box\varphi$ für „φ gilt in der Zukunft immer“,
    $\Diamond\varphi$ für „φ gilt irgendwann in der Zukunft“
  - Deontische Logik: $\Box\varphi$ für „φ ist verpflichtend“,
    $\Diamond\varphi$ für „φ ist erlaubt“
  - ...
- In Fuzzylogik sind Formeln nicht wahr oder falsch, sondern haben Werte zwischen 0 und 1.

Wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- Logik
  ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- Automatentheorie und formale Sprachen
  ▷ Was ist eine Berechnung?
- Berechenbarkeitstheorie
  ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- Komplexitätstheorie
  ▷ Was kann effizient berechnet werden?

Wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- Logik ✓
  ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- Automatentheorie und formale Sprachen
  ▷ Was ist eine Berechnung?
- Berechenbarkeitstheorie
  ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- Komplexitätstheorie
  ▷ Was kann effizient berechnet werden?