

Theorie der Informatik

4. Prädikatenlogik I

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

3. März 2014

Motivation

Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

- 1 Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- 2 Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
- 3 Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

- ① Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- ② Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
- ③ Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Können wir in Aussagenlogik nicht ausdrücken:

- Objekte x, y, z aus G
- Objektreferenzierung $(x \circ y)$ mit Funktion $\circ$
- Gleichheit $=$
- „Für alle“, „es gibt“

Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

- ① Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- ② Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
- ③ Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Können wir in Aussagenlogik nicht ausdrücken:

- Objekte x, y, z aus G
- Objektreferenzierung $(x \circ y)$ mit Funktion $\circ$
- Gleichheit $=$
- „Für alle“, „es gibt“

▷ Benötigen ausdrucksstärkere Logik

↪ **Prädikatenlogik**

Syntax der Prädikatenlogik

Syntax: Bestandteile

- **Signaturen** definieren erlaubte Symbole.
Analogie: Variablenmenge A in Aussagenlogik
- **Terme** werden von Semantik mit Objekten assoziiert.
Keine Analogie in Aussagenlogik
- **Formeln** werden von Semantik mit Wahrheitswerten
(**wahr** oder **falsch**) assoziiert.
Analogie: Formeln in Aussagenlogik

Signaturen: Definition

Definition (Signatur)

Eine **Signatur** (der Prädikatenlogik) ist ein 4-Tupel $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ aus folgenden vier disjunkten Mengen:

- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{V}$ von **Variablensymbolen**
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{K}$ von **Konstantensymbolen**
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{F}$ von **Funktionssymbolen**
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{P}$ von **Prädikatsymbolen** (oder **Relationssymbolen**)

Jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ und Prädikatsymbol $P \in \mathcal{P}$ hat eine assoziierte **Stelligkeit** $St(f), St(P) \in \mathbb{N}_1$ (Anzahl von Argumenten).

Signaturen: Terminologie und Konventionen

Terminologie

- ***k*-stelliges** (Funktions- oder Prädikat-) symbol:
Symbol s mit Stelligkeit $St(s) = k$.
- Auch: **unär**, **binär**, **ternär**

Konventionen (in dieser Vorlesung):

- Variablensymbole werden *kursiv* dargestellt, andere Symbole aufrecht.
- Prädikatsymbole beginnen mit Grossbuchstaben, andere Symbole mit Kleinbuchstaben

Signaturen: Beispiele

Beispiel: Arithmetik

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$
- $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{Positiv}, \text{Quadratzahl}\}$

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2, St(\text{Positiv}) = St(\text{Quadratzahl}) = 1$

Signaturen: Beispiele

Beispiel: Genealogie

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- $\mathcal{K} = \{\text{roger-federer, lisa-simpson}\}$
- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{P} = \{\text{Weiblich, Männlich, Elternteil}\}$

$St(\text{Weiblich}) = St(\text{Männlich}) = 1, St(\text{Elternteil}) = 2$

Terme: Definition

Definition (Term)

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Ein **Term** (über $\mathcal{S}$) ist induktiv nach folgenden Regeln konstruiert:

- Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol $k \in \mathcal{K}$ ist ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme und ist $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit k , dann ist $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Terme: Definition

Definition (Term)

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Ein **Term** (über $\mathcal{S}$) ist induktiv nach folgenden Regeln konstruiert:

- Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol $k \in \mathcal{K}$ ist ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme und ist $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit k , dann ist $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Beispiele:

- x_4
- lisa-simson
- $\text{summe}(x_3, \text{produkt}(\text{eins}, x_5))$

Formeln: Definition

Definition (Formel)

Für eine Signatur $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ist die Menge der prädikatenlogischen **Formeln** (über $\mathcal{S}$) induktiv wie folgt definiert:

- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme (über $\mathcal{S}$) und ist $P \in \mathcal{P}$ ein k -stelliges Prädikatsymbol, dann ist die **atomare Formel** (oder das **Atom**) $P(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- Sind t_1 und t_2 Terme (über $\mathcal{S}$), dann ist die **Identität** $(t_1 = t_2)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- Ist $x \in \mathcal{V}$ ein Variablensymbol und φ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann sind die **Allquantifizierung** $\forall x \varphi$ und die **Existenzquantifizierung** $\exists x \varphi$ Formeln über $\mathcal{S}$.
- Ist φ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann auch die **Negation** $\neg \varphi$.
- Sind φ und ψ Formeln über $\mathcal{S}$, dann auch die **Konjunktion** $(\varphi \wedge \psi)$ und die **Disjunktion** $(\varphi \vee \psi)$.

Formeln: Beispiele

Beispiele: Arithmetik und Genealogie

- $\text{Positiv}(x_2)$
- $\forall x (\neg \text{Quadratzahl}(x) \vee \text{Positiv}(x))$
- $\exists x_3 (\text{Quadratzahl}(x_3) \wedge \neg \text{Positiv}(x_3))$
- $\forall x (x = y)$
- $\forall x (\text{summe}(x, x) = \text{produkt}(x, \text{eins}))$
- $\forall x \exists y (\text{summe}(x, y) = \text{null})$
- $\forall x \exists y (\text{Elternteil}(y, x) \wedge \text{Weiblich}(y))$

Terminologie: Die Symbole $\forall$ und $\exists$ heissen **Quantoren**.

Abkürzungen und Klammerung per Konvention

Abkürzungen

- $(\varphi \rightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.
- Sequenzen von gleichen Quantoren kann man zur Abkürzung zusammenfassen. Zum Beispiel:
 - $\forall x\forall y\forall z \varphi \rightsquigarrow \forall xyz \varphi$
 - $\exists x\exists y\exists z \varphi \rightsquigarrow \exists xyz \varphi$
 - $\forall w\exists x\exists y\forall z \varphi \rightsquigarrow \forall w\exists xy\forall z \varphi$

Abkürzungen und Klammerung per Konvention

Abkürzungen

- $(\varphi \rightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.
- Sequenzen von gleichen Quantoren kann man zur Abkürzung zusammenfassen. Zum Beispiel:
 - $\forall x \forall y \forall z \varphi \rightsquigarrow \forall xyz \varphi$
 - $\exists x \exists y \exists z \varphi \rightsquigarrow \exists xyz \varphi$
 - $\forall w \exists x \exists y \forall z \varphi \rightsquigarrow \forall w \exists xy \forall z \varphi$

Klammerung per Konvention

- analog zur Aussagenlogik
- Quantoren $\forall$ und $\exists$ binden stärker als alles andere.
- Beispiel: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ entspricht $(\forall x P(x) \rightarrow Q(x))$,
nicht $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Fragen



Fragen?

Quiz



Semantik der Prädikatenlogik

Semantik: Motivation

- Interpretation in der Aussagenlogik:
Wahrheitsbelegung für die **Aussagenvariablen**
- Gibt keine Aussagenvariablen in Prädikatenlogik
- Stattdessen: Interpretation legt Bedeutung der **Konstanten-**, **Funktions-** und **Prädikatsymbole** fest.
- Bedeutung von **Variablensymbolen** nicht durch Interpretation festgelegt, sondern durch gesonderte **Variablenzuweisung**.

Exkurs: Relationen

- Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das **kartesische Produkt** $M_1 \times \dots \times M_n$ die Menge
$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_1 \in M_1, \dots, e_n \in M_n\}.$$
- Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{1, 2\},$
$$M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$
- Spezialfall: $M^k = M \times \dots \times M$ (k -mal)
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$

Exkurs: Relationen

- Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das **kartesische Produkt** $M_1 \times \dots \times M_n$ die Menge
$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_1 \in M_1, \dots, e_n \in M_n\}.$$
- Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{1, 2\},$
$$M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$
- Spezialfall: $M^k = M \times \dots \times M$ (k -mal)
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$
- Eine n -stellige **Relation** R über den Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist eine Teilmenge ihres kartesischen Produkts:
$$R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n.$$
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $R_{\leq} \subseteq M^2$ als
$$R_{\leq} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

Interpretationen und Variablenzuweisungen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Interpretation, Variablenzuweisung)

Eine **Interpretation** (für $\mathcal{S}$) ist ein Paar $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit folgenden Komponenten:

- eine nichtleere Menge **U** genannt **Universum** (oder **Grundmenge**) und
- eine Funktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, die den Konstanten-, Funktions- und Prädikatsymbolen eine Bedeutung zuweist:
 - $k^{\mathcal{I}} \in U$ für Konstantensymbole $k \in \mathcal{K}$
 - $f^{\mathcal{I}} : U^k \rightarrow U$ für k -stellige Funktionssymbole $f \in \mathcal{F}$
 - $P^{\mathcal{I}} \subseteq U^k$ für k -stellige Prädikatsymbole $P \in \mathcal{P}$

Eine **Variablenzuweisung** (für $\mathcal{S}$ und Universum U) ist eine Funktion $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow U$.

Interpretationen und Variablenzuweisungen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$,

$\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$, $\mathcal{P} = \{\text{Quadratzahl}\}$

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$, $St(\text{Quadratzahl}) = 1$

Interpretationen und Variablenzuweisungen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$,
 $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$, $\mathcal{P} = \{\text{Quadratzahl}\}$
 $St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$, $St(\text{Quadratzahl}) = 1$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- $\text{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\text{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\text{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\text{Quadratzahl}^{\mathcal{I}} = \{u_0, u_1, u_2, u_4\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

Semantik: informell

Beispiel: $(\forall x(\text{Block}(x) \rightarrow \text{Rot}(x)) \wedge \text{Block}(a))$

„Für alle Objekte x : wenn x ein Block ist, dann ist x rot.

Zudem ist das Objekt, das mit a bezeichnet wird, ein Block.“

- **Terme** werden als **Objekte** interpretiert.
- **Unäre Prädikate** bezeichnen Eigenschaften von Objekten (ein Block sein, rot sein, eine Quadratzahl sein, ...)
- **Allgemeine Prädikate** beschreiben Beziehungen zwischen Objekten (das Kind von jemandem sein, einen gemeinsamen Teiler haben, ...)
- **Allquantifizierte** Formeln („ $\forall$ “) sind wahr, wenn sie für **alle** Objekte im Universum gelten.
- **Existenzquantifizierte** Formeln („ $\exists$ “) sind wahr, wenn sie für **mindestens ein** Objekt im Universum gelten.

Interpretation von Termen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Interpretation eines Terms)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$,
und sei α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Universum U .

Sei t ein Term über $\mathcal{S}$.

Die **Interpretation von t** unter $\mathcal{I}$ und α , symbolisch $t^{\mathcal{I}, \alpha}$, ist ein Element des Universums U und folgendermassen definiert:

- Wenn $t = x$ mit $x \in \mathcal{V}$ (t ist ein **Variablenterm**):
 $x^{\mathcal{I}, \alpha} = \alpha(x)$
- Wenn $t = k$ mit $k \in \mathcal{K}$ (t ist ein **Konstantenterm**):
 $k^{\mathcal{I}, \alpha} = k^{\mathcal{I}}$
- Wenn $t = f(t_1, \dots, t_k)$ (t ist ein **Funktionsterm**):
 $f(t_1, \dots, t_k)^{\mathcal{I}, \alpha} = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I}, \alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I}, \alpha})$

Interpretation von Termen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$,

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$

Interpretation von Termen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$,
 $St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- $\text{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\text{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\text{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

Interpretation von Termen: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

- $\text{null}^{\mathcal{I},\alpha} =$
- $y^{\mathcal{I},\alpha} =$
- $\text{summe}(x, y)^{\mathcal{I},\alpha} =$
- $\text{produkt}(\text{eins}, \text{summe}(x, \text{null}))^{\mathcal{I},\alpha} =$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$, und sei α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Grundmenge U . Wir sagen $\mathcal{I}$ und α **erfüllen** eine prädikatenlogische Formel φ (auch: φ ist **wahr** unter $\mathcal{I}$ und α), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$, entsprechend der folgenden induktiven Regeln:

$$\mathcal{I}, \alpha \models P(t_1, \dots, t_k) \quad \text{gdw} \quad \langle t_1^{\mathcal{I}, \alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I}, \alpha} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models (t_1 = t_2) \quad \text{gdw} \quad t_1^{\mathcal{I}, \alpha} = t_2^{\mathcal{I}, \alpha}$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models \neg \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \wedge \psi) \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ und } \mathcal{I}, \alpha \models \psi$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \vee \psi) \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ oder } \mathcal{I}, \alpha \models \psi$$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

...

$\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi$ gdw $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi$ für alle $u \in U$

$\mathcal{I}, \alpha \models \exists x \varphi$ gdw $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi$ für mindestens ein $u \in U$

wobei $\alpha[x := u]$ die gleiche Variablenbelegung ist wie α , ausser dass sie der Variable x den Wert u zuweist.

Formal:

$$(\alpha[x := u])(z) = \begin{cases} u & \text{falls } z = x \\ \alpha(z) & \text{falls } z \neq x \end{cases}$$

Semantik: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\text{Block}, \text{Rot}\}$,

$St(\text{Block}) = St(\text{Rot}) = 1$.

Semantik: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\text{Block}, \text{Rot}\}$,
 $St(\text{Block}) = St(\text{Rot}) = 1$.

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
- $a^{\mathcal{I}} = u_1$
- $b^{\mathcal{I}} = u_3$
- $\text{Block}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2\}$
- $\text{Rot}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_1, y \mapsto u_2, z \mapsto u_1\}$

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(b) \vee \neg \text{Block}(b))?$
- $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(x) \rightarrow (\text{Block}(x) \vee \neg \text{Block}(y)))?$
- $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(a) \wedge \text{Block}(b))?$
- $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(\text{Block}(x) \rightarrow \text{Rot}(x))?$

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(b) \vee \neg \text{Block}(b))$?

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(x) \rightarrow (\text{Block}(x) \vee \neg \text{Block}(y)))$?

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(a) \wedge \text{Block}(b))$?

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(\text{Block}(x) \rightarrow \text{Rot}(x))$?

Fragen



Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Prädikatenlogik** erlaubt es, allgemeine Aussagen über **Objekte** und ihre **Beziehung** zueinander zu machen.
- **Signatur** legt in Formeln erlaubte Symbole fest.
- **Syntax** definiert, was prädikatenlogische Formeln sind.
- **Semantik** gibt den Formeln Bedeutung abhängig von einer **Interpretation** und **Variablenbelegung**.
- **Terme** werden als **Objekte** interpretiert.
- **Formeln** sind unter einer Interpretation und Variablenbelegung **wahr** oder **nicht wahr** (falsch).