Theorie der Informatik

4. Prädikatenlogik I

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

3. März 2014

Theorie der Informatik

3. März 2014 — 4. Prädikatenlogik I

4.1 Motivation

Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

1. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
2. Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
3. Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Können wir in Aussagenlogik nicht ausdrücken:

- Objekte x, y, z aus G
- Objektreferenzierung $(x \circ y)$ mit Funktion $\circ$
- Gleichheit $=$
- „Für alle“, „es gibt“

▷ Benötigen ausdrucksstärkere Logik
$\rightsquigarrow$ Prädikatenlogik

4.2 Syntax der Prädikatenlogik

Syntax: Bestandteile

- Signaturen definieren erlaubte Symbole.
  Analogie: Variablenmenge A in Aussagenlogik
- Terme werden von Semantik mit Objekten assoziiert.
  Keine Analogie in Aussagenlogik
- Formeln werden von Semantik mit Wahrheitswerten (wahr oder falsch) assoziiert.
  Analogie: Formeln in Aussagenlogik

Signaturen: Definition

Definition (Signatur)

Eine Signatur (der Prädikatenlogik) ist ein 4-Tupel $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ aus folgenden vier disjunkten Mengen:

- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{V}$ von Variablensymbolen
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{K}$ von Konstantensymbolen
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{F}$ von Funktionssymbolen
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{P}$ von Prädikatsymbolen (oder Relationssymbolen)

Jedes Funktionssymbol $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ und Prädikatsymbol $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ hat eine assoziierte Stelligkeit $St(\mathsf{f}), St(\mathsf{P}) \in \mathbb{N}_1$ (Anzahl von Argumenten).

Signaturen: Terminologie und Konventionen

Terminologie

- *k*-stelliges (Funktions- oder Prädikat-) symbol:
  Symbol s mit Stelligkeit $St(\mathsf{s}) = k$.
- Auch: unär, binär, ternär

Konventionen (in dieser Vorlesung):

- Variablensymbole werden *kursiv* dargestellt, andere Symbole aufrecht.
- Prädikatsymbole beginnen mit Grossbuchstaben, andere Symbole mit Kleinbuchstaben

Signaturen: Beispiele

Beispiel: Arithmetik

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$
- $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{Positiv}, \text{Quadratzahl}\}$

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2,\ St(\text{Positiv}) = St(\text{Quadratzahl}) = 1$

Signaturen: Beispiele

Beispiel: Genealogie

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- $\mathcal{K} = \{\text{roger-federer}, \text{lisa-simpson}\}$
- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{P} = \{\text{Weiblich}, \text{Männlich}, \text{Elternteil}\}$

$St(\text{Weiblich}) = St(\text{Männlich}) = 1,\ St(\text{Elternteil}) = 2$

Terme: Definition

Definition (Term)

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.
Ein Term (über $\mathcal{S}$) ist induktiv nach folgenden Regeln konstruiert:

- Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$ ist ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme und ist $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit k, dann ist $\mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Beispiele:

- x_4
- lisa-simson
- $\text{summe}(x_3, \text{produkt}(\text{eins}, x_5))$

Formeln: Definition

Definition (Formel)

Für eine Signatur $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ist die Menge der prädikatenlogischen Formeln (über $\mathcal{S}$) induktiv wie folgt definiert:

- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme (über $\mathcal{S}$) und ist $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ ein k-stelliges Prädikatsymbol, dann ist die atomare Formel (oder das Atom) $\mathsf{P}(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- Sind t_1 und t_2 Terme (über $\mathcal{S}$), dann ist die Identität $(t_1 = t_2)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- Ist $x \in \mathcal{V}$ ein Variablensymbol und φ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann sind die Allquantifizierung $\forall x\, \varphi$ und die Existenzquantifizierung $\exists x\, \varphi$ Formeln über $\mathcal{S}$.
- Ist φ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann auch die Negation $\neg\varphi$.
- Sind φ und ψ Formeln über $\mathcal{S}$, dann auch die Konjunktion $(\varphi \wedge \psi)$ und die Disjunktion $(\varphi \vee \psi)$.

Formeln: Beispiele

Beispiele: Arithmetik und Genealogie

- $\mathsf{Positiv}(x_2)$
- $\forall x\,(\neg\mathsf{Quadratzahl}(x) \lor \mathsf{Positiv}(x))$
- $\exists x_3\,(\mathsf{Quadratzahl}(x_3) \land \neg\mathsf{Positiv}(x_3))$
- $\forall x\,(x = y)$
- $\forall x\,(\mathsf{summe}(x, x) = \mathsf{produkt}(x, \mathsf{eins}))$
- $\forall x \exists y\,(\mathsf{summe}(x, y) = \mathsf{null})$
- $\forall x \exists y\,(\mathsf{Elternteil}(y, x) \land \mathsf{Weiblich}(y))$

Terminologie: Die Symbole $\forall$ und $\exists$ heissen Quantoren.

Abkürzungen und Klammerung per Konvention

Abkürzungen

- $(\varphi \rightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $(\neg\varphi \lor \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $((\varphi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \varphi))$.
- Sequenzen von gleichen Quantoren kann man zur Abkürzung zusammenfassen. Zum Beispiel:
  - $\forall x \forall y \forall z\, \varphi \rightsquigarrow \forall xyz\, \varphi$
  - $\exists x \exists y \exists z\, \varphi \rightsquigarrow \exists xyz\, \varphi$
  - $\forall w \exists x \exists y \forall z\, \varphi \rightsquigarrow \forall w \exists xy \forall z\, \varphi$

Klammerung per Konvention

- analog zur Aussagenlogik
- Quantoren $\forall$ und $\exists$ binden stärker als alles andere.
- Beispiel: $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ entspricht $(\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x))$,
  nicht $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.

4.3 Semantik der Prädikatenlogik

Semantik: Motivation

- Interpretation in der Aussagenlogik:
  Wahrheitsbelegung für die Aussagenvariablen
- Gibt keine Aussagenvariablen in Prädikatenlogik
- Stattdessen: Interpretation legt Bedeutung der Konstanten-, Funktions- und Prädikatsymbole fest.
- Bedeutung von Variablensymbolen nicht durch Interpretation festgelegt, sondern durch gesonderte Variablenzuweisung.

Exkurs: Relationen

- Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times \dots \times M_n$ die Menge $M_1 \times \dots \times M_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_1 \in M_1, \dots, e_n \in M_n\}$.
- Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- Spezialfall: $M^k = M \times \dots \times M$ (k-mal)
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
- Eine n-stellige Relation R über den Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist eine Teilmenge ihres kartesischen Produkts: $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$.
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $R_\leq \subseteq M^2$ als $R_\leq = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

Interpretationen und Variablenzuweisungen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Interpretation, Variablenzuweisung)

Eine Interpretation (für $\mathcal{S}$) ist ein Paar $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit folgenden Komponenten:

- eine nichtleere Menge U genannt Universum (oder Grundmenge) und
- eine Funktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, die den Konstanten-, Funktions- und Prädikatsymbolen eine Bedeutung zuweist:
  - $\mathsf{k}^{\mathcal{I}} \in U$ für Konstantensymbole $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$
  - $\mathsf{f}^{\mathcal{I}} : U^k \to U$ für k-stellige Funktionssymbole $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$
  - $\mathsf{P}^{\mathcal{I}} \subseteq U^k$ für k-stellige Prädikatsymbole $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$

Eine Variablenzuweisung (für $\mathcal{S}$ und Universum U) ist eine Funktion $\alpha : \mathcal{V} \to U$.

Interpretationen und Variablenzuweisungen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$,
$\mathcal{K} = \{\mathsf{null}, \mathsf{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\mathsf{summe}, \mathsf{produkt}\}$, $\mathcal{P} = \{\mathsf{Quadratzahl}\}$
$St(\mathsf{summe}) = St(\mathsf{produkt}) = 2$, $St(\mathsf{Quadratzahl}) = 1$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- $\mathsf{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- $\mathsf{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\mathsf{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\mathsf{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\mathsf{Quadratzahl}^{\mathcal{I}} = \{u_0, u_1, u_2, u_4\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

Semantik: informell

Beispiel: $(\forall x(\mathsf{Block}(x) \to \mathsf{Rot}(x)) \land \mathsf{Block}(\mathsf{a}))$
„Für alle Objekte x: wenn x ein Block ist, dann ist x rot. Zudem ist das Objekt, das mit a bezeichnet wird, ein Block.“

- Terme werden als Objekte interpretiert.
- Unäre Prädikate bezeichnen Eigenschaften von Objekten (ein Block sein, rot sein, eine Quadratzahl sein, ...)
- Allgemeine Prädikate beschreiben Beziehungen zwischen Objekten (das Kind von jemandem sein, einen gemeinsamen Teiler haben, ...)
- Allquantifizierte Formeln („∀“) sind wahr, wenn sie für alle Objekte im Universum gelten.
- Existenzquantifizierte Formeln („∃“) sind wahr, wenn sie für mindestens ein Objekt im Universum gelten.

Interpretation von Termen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Interpretation eines Terms)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$,
und sei α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Universum U.

Sei t ein Term über $\mathcal{S}$.
Die Interpretation von t unter $\mathcal{I}$ und α, symbolisch $t^{\mathcal{I},\alpha}$, ist ein Element des Universums U und folgendermassen definiert:

- Wenn $t = x$ mit $x \in \mathcal{V}$ (t ist ein Variablenterm):
  $x^{\mathcal{I},\alpha} = \alpha(x)$
- Wenn $t = \mathsf{k}$ mit $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$ (t ist ein Konstantenterm):
  $\mathsf{k}^{\mathcal{I},\alpha} = \mathsf{k}^{\mathcal{I}}$
- Wenn $t = \mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)$ (t ist ein Funktionsterm):
  $\mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)^{\mathcal{I},\alpha} = \mathsf{f}^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},\alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I},\alpha})$

Interpretation von Termen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$
mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\mathsf{null}, \mathsf{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\mathsf{summe}, \mathsf{produkt}\}$,
$St(\mathsf{summe}) = St(\mathsf{produkt}) = 2$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- $\mathsf{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- $\mathsf{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\mathsf{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\mathsf{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

Interpretation von Termen: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

- $\mathsf{null}^{\mathcal{I},\alpha} =$
- $y^{\mathcal{I},\alpha} =$
- $\mathsf{summe}(x, y)^{\mathcal{I},\alpha} =$
- $\mathsf{produkt}(\mathsf{eins}, \mathsf{summe}(x, \mathsf{null}))^{\mathcal{I},\alpha} =$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$, und
sei α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Grundmenge U.
Wir sagen $\mathcal{I}$ und α erfüllen eine prädikatenlogische Formel φ (auch: φ ist wahr unter $\mathcal{I}$ und α), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$,
entsprechend der folgenden induktiven Regeln:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}, \alpha \models \mathsf{P}(t_1, \dots, t_k) \quad & \text{gdw } \langle t_1^{\mathcal{I},\alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I},\alpha} \rangle \in \mathsf{P}^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I}, \alpha \models (t_1 = t_2) \quad & \text{gdw } t_1^{\mathcal{I},\alpha} = t_2^{\mathcal{I},\alpha} \\
\mathcal{I}, \alpha \models \neg\varphi \quad & \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi \\
\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \land \psi) \quad & \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ und } \mathcal{I}, \alpha \models \psi \\
\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \lor \psi) \quad & \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ oder } \mathcal{I}, \alpha \models \psi
\end{aligned}
$$

...

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

...

$\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi$ gdw $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi$ für alle $u \in U$

$\mathcal{I}, \alpha \models \exists x \varphi$ gdw $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi$ für mindestens ein $u \in U$

wobei $\alpha[x := u]$ die gleiche Variablenbelegung ist wie α, ausser dass sie der Variable x den Wert u zuweist.
Formal:

$$(\alpha[x := u])(z) = \begin{cases} u & \text{falls } z = x \\ \alpha(z) & \text{falls } z \neq x \end{cases}$$

Semantik: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$
mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\mathrm{Block}, \mathrm{Rot}\}$,
$St(\mathrm{Block}) = St(\mathrm{Rot}) = 1$.

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
- $\mathrm{a}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\mathrm{b}^{\mathcal{I}} = u_3$
- $\mathrm{Block}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2\}$
- $\mathrm{Rot}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_1, y \mapsto u_2, z \mapsto u_1\}$

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathrm{Block}(\mathrm{b}) \lor \neg \mathrm{Block}(\mathrm{b}))$?
- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathrm{Block}(x) \rightarrow (\mathrm{Block}(x) \lor \neg \mathrm{Block}(y)))$?
- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathrm{Block}(\mathrm{a}) \land \mathrm{Block}(\mathrm{b}))$?
- $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x (\mathrm{Block}(x) \rightarrow \mathrm{Rot}(x))$?

4.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Prädikatenlogik erlaubt es, allgemeine Aussagen über Objekte und ihre Beziehung zueinander zu machen.
- Signatur legt in Formeln erlaubte Symbole fest.
- Syntax definiert, was prädikatenlogische Formeln sind.
- Semantik gibt den Formeln Bedeutung abhängig von einer Interpretation und Variablenbelegung.
- Terme werden als Objekte interpretiert.
- Formeln sind unter einer Interpretation und Variablenbelegung wahr oder nicht wahr (falsch).