Theorie der Informatik

2. Aussagenlogik II

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

24. Februar 2014

Theorie der Informatik

24. Februar 2014 — 2. Aussagenlogik II

2.1 Äquivalenzen

Äquivalente Formeln

Definition (Äquivalenz aussagenlogischer Formeln)

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ über A sind (logisch) äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), falls für alle Wahrheitsbelegungen $\mathcal{I}$ für A gilt, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ genau dann wenn $\mathcal{I} \models \psi$.

Äquivalente Formeln: Beispiel

$$((\varphi \lor \psi) \lor \chi) \equiv (\varphi \lor (\psi \lor \chi))$$

$\mathcal{I} \models \varphi$	$\mathcal{I} \models \psi$	$\mathcal{I} \models \chi$	$\mathcal{I} \models (\varphi \lor \psi)$	$\mathcal{I} \models (\psi \lor \chi)$	$\mathcal{I} \models ((\varphi \lor \psi) \lor \chi)$	$\mathcal{I} \models (\varphi \lor (\psi \lor \chi))$
Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
Nein	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja
Nein	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja
Nein	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja
Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja
Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Einige Äquivalenzen

$$(\varphi \land \varphi) \equiv \varphi$$
$$(\varphi \lor \varphi) \equiv \varphi \qquad \text{(Idempotenz)}$$

$$(\varphi \land \psi) \equiv (\psi \land \varphi)$$
$$(\varphi \lor \psi) \equiv (\psi \lor \varphi) \qquad \text{(Kommutativität)}$$

$$((\varphi \land \psi) \land \chi) \equiv (\varphi \land (\psi \land \chi))$$
$$((\varphi \lor \psi) \lor \chi) \equiv (\varphi \lor (\psi \lor \chi)) \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$(\varphi \land (\varphi \lor \psi)) \equiv \varphi$$
$$(\varphi \lor (\varphi \land \psi)) \equiv \varphi \qquad \text{(Absorption)}$$

$$(\varphi \land (\psi \lor \chi)) \equiv ((\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi))$$
$$(\varphi \lor (\psi \land \chi)) \equiv ((\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)) \qquad \text{(Distributivität)}$$

Mehr Äquivalenzen

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi \qquad \text{(Doppelnegation)}$$

$$\neg(\varphi \land \psi) \equiv (\neg\varphi \lor \neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \lor \psi) \equiv (\neg\varphi \land \neg\psi) \qquad \text{(De Morgansche Regeln)}$$

$$(\varphi \lor \psi) \equiv \varphi \text{ falls } \varphi \text{ Tautologie}$$
$$(\varphi \land \psi) \equiv \psi \text{ falls } \varphi \text{ Tautologie} \qquad \text{(Tautologieregeln)}$$

$$(\varphi \lor \psi) \equiv \psi \text{ falls } \varphi \text{ unerfüllbar}$$
$$(\varphi \land \psi) \equiv \varphi \text{ falls } \varphi \text{ unerfüllbar} \qquad \text{(Unerfüllbarkeitsregeln)}$$

Anwendung von Äquivalenzen: Beispiel

$$\begin{aligned}
(P \land (\neg Q \lor P)) &\equiv ((P \land \neg Q) \lor (P \land P)) && \text{(Distributivität)}\\
&\equiv ((P \land \neg Q) \lor P) && \text{(Idempotenz)}\\
&\equiv (P \lor (P \land \neg Q)) && \text{(Kommutativität)}\\
&\equiv P && \text{(Absorption)}
\end{aligned}$$

Ersetzbarkeitstheorem

Theorem (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien φ und φ' äquivalente aussagenlogische Formeln über A. Sei ψ eine aussagenlogische Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel φ. Dann ist ψ äquivalent zu ψ', wobei ψ' aus ψ hervorgeht, indem ein Vorkommen von φ in ψ durch φ' ersetzt wird.

Beweis.

Beweis durch Induktion über den Formelaufbau von ψ.

Induktionsanfang: Falls ψ eine atomare Formel ist, dann gilt $\psi = \varphi$. Da damit $\psi' = \varphi'$ gelten muss, folgt die Aussage direkt aus $\varphi \equiv \varphi'$. ...

Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Induktionsannahme: Das Ersetzbarkeitstheorem gilt für alle Teilformeln von ψ.

Induktionsschritt: Falls $\psi = \varphi$, gilt das gleiche Argument wie beim Induktionsanfang. Sonst müssen wir drei Fälle unterscheiden.

Fall 1: ψ hat den Aufbau $\psi = \neg\chi$.
Damit hat ψ' den Aufbau $\psi' = \neg\chi'$, wobei χ' aus χ durch die Ersetzung der Teilformel φ durch φ' hervorgeht. Nach Induktionsvoraussetzung ist χ äquivalent zu χ'. Die Äquivalenz von ψ und ψ' folgt dann aus der semantischen Definition von „$\neg$“. ...

Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Fall 2: ψ hat den Aufbau $\psi = (\chi_1 \vee \chi_2)$.
Dann kommt φ in χ_1 oder in χ_2 vor. Wir betrachten den Fall χ_1 (Fall χ_2 analog). Dann ist nach Induktionsannahme χ_1 äquivalent zu χ_1', welches aus χ_1 durch Ersetzen der Teilformel φ durch φ' hervorgeht. Aus der Definition von „$\vee$“ folgt, dass $\psi \equiv (\chi_1' \vee \chi_2) = \psi'$.

Fall 3: φ hat den Aufbau $\varphi = (\chi_1 \wedge \chi_2)$.
Beweis analog zu Fall 2. □

2.2 Vereinfachte Schreibweise

Klammern

Assoziativität:

$$((\varphi \land \psi) \land \chi) \equiv (\varphi \land (\psi \land \chi))$$
$$((\varphi \lor \psi) \lor \chi) \equiv (\varphi \lor (\psi \lor \chi))$$

- Klammerung bei einer Konjunktion als Teilformel einer Konjunktion beeinflusst nicht, ob Interpretation ein Modell der Formel ist
- Bei Disjunktionen analog
- Können in diesen Fällen Klammern weglassen und Semantik einer beliebigen Klammerung verwenden
- Beispiel: $(A_1 \land A_2 \land A_3 \land A_4)$ statt $((A_1 \land (A_2 \land A_3)) \land A_4)$
- Beispiel: $(\neg A \lor (B \land C) \lor D)$ statt $((\neg A \lor (B \land C)) \lor D)$

Klammern

Können wir Klammern dann immer weglassen und beliebige Klammerung annehmen? → Nein!

$$((\varphi \land \psi) \lor \chi) \not\equiv (\varphi \land (\psi \lor \chi))$$

Was sollte dann $\varphi \land \psi \lor \chi$ bedeuten?

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine implizite Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\land$
- $\land$ bindet stärker als $\lor$
- $\lor$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Beispiel

$A \lor \neg C \land B \rightarrow A \lor \neg D$ entspricht $((A \lor (\neg C \land B)) \rightarrow (A \lor \neg D))$

- ▷ Oftmals schwerer zu lesen
- ▷ Fehleranfälliger
- ▷ Verwenden wir daher in dieser Vorlesung nicht.

Kurzschreibweise für Konjunktionen und Disjunktionen

Kurzschreibweise für Addition:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$\sum_{x \in \{x_1,\ldots,x_n\}} x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Analog (möglich wegen Kommutativität von $\land$ und $\lor$):

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = (\varphi_1 \land \varphi_2 \land \cdots \land \varphi_n)$$
$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = (\varphi_1 \lor \varphi_2 \lor \cdots \lor \varphi_n)$$
$$\left(\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi\right) = (\varphi_1 \land \varphi_2 \land \cdots \land \varphi_n)$$
$$\left(\bigvee_{\varphi \in X} \varphi\right) = (\varphi_1 \lor \varphi_2 \lor \cdots \lor \varphi_n)$$

für $X = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

Kurzschreibweise: Randfälle

Gilt $\mathcal{I} \models \psi$ bei

$$\psi = (\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi) \text{ und } \psi = (\bigvee_{\varphi \in X} \varphi)$$

wenn $X = \{\}$ oder $X = \{\chi\}$?

Konvention:
- $(\bigwedge_{\varphi \in \{\}} \varphi)$ ist Tautologie.
- $(\bigvee_{\varphi \in \{\}} \varphi)$ ist unerfüllbar.
- $(\bigwedge_{\varphi \in \{\chi\}} \varphi) = (\bigvee_{\varphi \in \{\chi\}} \varphi) = \chi$

▷ Warum?

2.3 Normalformen

Warum Normalformen?

- Eine Normalform ist eine Darstellung mit bestimmten syntaktischen Eigenschaften.
- Bedingung für sinnvolle Normalform: Jede Formel muss logisch äquivalente Formel in Normalform besitzen.
- Vorteile:
  - Können Beweise auf Formeln in Normalform beschränken
  - Können Algorithmen nur für Eingaben in Normalform angeben

Etwas Terminologie

- Ein Literal ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel (z.B. A und $\neg A$).
- Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen (z.B. $(Q \vee \neg P \vee \neg S \vee R)$).
- Ein Monom ist eine Konjunktion von Literalen (z.B. $(Q \wedge \neg P \wedge \neg S \wedge R)$).

Die Begriffe Klausel und Monom werden auch für den Randfall mit nur einem Literal verwendet.

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \lor \neg Q) \land P)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom
- $(\neg Q \land R)$ ist Monom
- $(P \lor \neg Q)$ ist Klausel
- $\neg P$ ist Literal, Klausel und Monom
- $(P \rightarrow Q)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom

Konjunktive Normalform

Definition (Konjunktive Normalform)

Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF) wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, d.h., wenn sie die Form

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}\right)\right)$$

mit $n, m_i > 0$ (für $1 \leq i \leq n$) hat, wobei die L_{ij} Literale sind.

Beispiel

$((\neg P \lor Q) \land R \land (P \lor \neg S))$ ist in KNF.

Disjunktive Normalform

Definition (Disjunktive Normalform)

Eine Formel ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie eine Disjunktion von Monomen ist, d.h., wenn sie die Form

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij}\right)\right)$$

mit $n, m_i > 0$ (für $1 \leq i \leq n$)hat, wobei die L_{ij} Literale sind.

Beispiel

$((\neg P \land Q) \lor R \lor (P \land \neg S))$ ist in DNF.

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \lor \neg Q) \land P)$ ist in KNF
- $((R \lor Q) \land P \land (R \lor S))$ ist in KNF
- $(P \lor (\neg Q \land R))$ ist in DNF
- $((P \lor \neg Q) \rightarrow P)$ ist weder in KNF noch in DNF
- P ist in KNF und in DNF

Herstellung von KNF (und DNF)

Algorithmus zur Herstellung von KNF

1. Ersetze Abkürzungen mit $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ durch tatsächliche Formel (($\rightarrow$)-Eliminierung und ($\leftrightarrow$)-Eliminierung).
   $\rightsquigarrow$ Formelstruktur: nur $\vee$, $\wedge$, $\neg$
2. Schiebe Negationen mit De Morgan und Doppelnegation nach innen.
   $\rightsquigarrow$ Formelstruktur: nur $\vee$, $\wedge$, Literale
3. Verteile $\vee$ über $\wedge$ mit Distributivität (genaugenommen auch Kommutativität).
   $\rightsquigarrow$ Formelstruktur: KNF
4. Optional: Vereinfache die Formel am Ende oder auch zwischendurch (z.B. mit Idempotenz).

Hinweis: Für DNF, verteile stattdessen $\wedge$ über $\vee$.
Frage: Laufzeit?

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) && \text{[Schritt 1]}\\
&\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) && \text{[Schritt 2]}\\
&\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) && \text{[Schritt 2]}\\
&\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) && \text{[Schritt 2]}\\
&\equiv ((\neg P \vee Q \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \wedge \\
&\quad (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T))) && \text{[Schritt 3]}\\
&\equiv (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) && \text{[Schritt 4]}\\
&\equiv ((\neg R \vee P \vee \neg S) \wedge (\neg R \vee P \vee \neg T)) && \text{[Schritt 3]}
\end{aligned}$$

DNF herstellen: Beispiel

Herstellung von disjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) && \text{[Schritt 1]}\\
&\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) && \text{[Schritt 2]}\\
&\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) && \text{[Schritt 2]}\\
&\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) && \text{[Schritt 2]}\\
&\equiv ((\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) && \text{[Schritt 3]}
\end{aligned}$$

Existenz von äquivalenter Formel in Normalformen

Theorem

Für jede Formel φ gibt es eine logisch äquivalente Formel in KNF und eine logisch äquivalente Formel in DNF.

- „gibt es eine“ heisst immer „gibt es mindestens eine“. Sonst würde man „gibt es genau eine“ schreiben.
- Intuition: Algorithmus zur Herstellung von Normalform funktioniert mit beliebigen Ausgangsformeln und verwendet nur Äquivalenzumformungen.
- Echter Beweis ginge z.B. über Induktion über den Aufbau der Formeln.

Weitere Theoreme

Theorem
Eine Formel in KNF ist eine Tautologie gdw. jede Klausel eine Tautologie ist.

Theorem
Eine Formel in DNF ist erfüllbar gdw. mindestens ein Monom erfüllbar ist.

▷ Beides leicht anhand von Semantik der Aussagenlogik zu zeigen.

2.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Logische Äquivalenz erfasst, wann Formeln semantisch gleich sind.
- Äquivalenzumformung dient zur Vereinfachung von Formeln und zur Herstellung von Normalformen.
- Formel in KNF ist Konjunktion von Klauseln.
- Formel in DNF ist Disjunktion von Monomen.
- Jede Formel hat äquivalente Formeln in DNF und in KNF.