Theorie der Informatik (CS 206)

M. Helmert, G. Röger
Frühjahrssemester 2014

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 7

Abgabe: 16. April

Hinweis: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PS- oder PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 7.1 (Turingmaschinen, 1.5+1.5 Punkte)

(a) Eine Turingmaschine M, die die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid w \text{ enthält gleich viele } a,\ b \text{ und } c\}$$

akzeptiert, funktioniert mit folgender Schleife:

M sucht ein a auf dem Band und ersetzt es durch ein x. Dann sucht sie ein b auf dem Band und ersetzt es durch x. Dann sucht sie ein c auf dem Band und ersetzt es durch x. Falls sie dabei ein Zeichen nicht findet, geht sie in eine Endlosschleife. Sonst prüft sie, ob alle Zeichen auf dem Band durch x ersetzt wurden. Falls ja, geht sie in einen Endzustand über, sonst beginnt sie die Schleife von vorne.

Geben Sie ein Zustandsdiagramm für eine *deterministische* Turingmaschine mit diesem Verhalten an.

(b) Beschreiben Sie (in Worten) das Programm einer Turingmaschine, die $L = \{a^i b^i c^i \mid i > 0\}$ akzeptiert.

Aufgabe 7.2 (Abschlusseigenschaften von Typ-0- und Typ-1-Sprachen, 0.5+0.5+1+1 Punkte)
Zeigen Sie, dass

(a) Typ-1- und Typ-0-Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen sind.

(b) Typ-1- und Typ-0-Sprachen unter Produkt abgeschlossen sind.

(c) Typ-1- und Typ-0-Sprachen unter Stern abgeschlossen sind.

(d) Typ-0-Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind.

Falls Sie eine Aussage zeigen, indem Sie eine Grammatik für die gefragte Sprache konstruieren, dann geben Sie bitte eine komplette formale Spezifikation der neuen Grammatik an (in Abhängigkeit von Grammatiken für die Ausgangssprachen).

Aufgabe 7.3 (Berechnung mit Turingmaschinen, 1+1 Punkte)

(a) Geben Sie eine DTM an, die die *Vorgängerfunktion* $pred_1$ berechnet (siehe Vorlesungsabschnitt 12.4).

(b) Geben Sie eine DTM an, die die *Vorgängerfunktion* $pred_2$ berechnet (siehe Vorlesungsabschnitt 12.4).

Geben Sie in beiden Fällen die DTM in Form eines Zustandsdiagramms an. Vereinfachende Schreibweisen dürfen Sie verwenden, sofern Sie sie vollständig erklären.

Aufgabe 7.4 (Berechenbarkeit und Komposition, 1+1 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Sei Σ ein Alphabet. Wenn die partiellen Funktionen $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ und $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ Turing-berechenbar sind, dann ist auch ihre *Komposition* $(f \circ g) : \Sigma^* \to \Sigma^*$ Turing-berechenbar.

Die Komposition zweier Funktionen ist allgemein definiert als $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Der Funktionswert ist inbesondere auch undefiniert, wenn $g(x)$ undefiniert ist.

(b) Wenn die partiellen Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ Turing-berechenbar sind, dann ist auch die partielle Funktion $h : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $h(x, y) := f(g(x + y))$ Turing-berechenbar.

(Sie dürfen hierbei voraussetzen, dass die Beispielfunktionen aus Vorlesungsabschnitt 12.4 Turing-berechenbar sind.)