Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

29. Aussagenlogik: Lokale Suche und Ausblick

Malte Helmert

Universität Basel

2. Mai 2014

Aussagenlogik: Überblick

Kapitelüberblick Aussagenlogik:

Lokale Suche: GSAT

Lokale Suche für SAT

- Neben systematischen gibt es auch erfolgreiche lokale Suchverfahren für SAT.
- Diese sind im Normalfall nicht vollständig und können insbesondere nicht die Unerfüllbarkeit einer Formel zeigen.
- Oft ist dies aber verschmerzbar, wenn man dafür für schwierigere Probleme erfüllende Belegungen finden kann.
- Insgesamt waren DPLL-basierte systematische Verfahren allerdings in den letzten Jahren erfolgreicher.

Lokale Suche für SAT: Ideen

Lokale Suchverfahren sind für SAT direkt anwendbar:

- Zustände: (vollständige) Belegungen
- Zielzustände: erfüllende Belegungen
- Suchnachbarschaft: ändere Belegung einer Variable
- Heuristiken: je nach Algorithmus;
  z.B. Anzahl unerfüllter Klauseln

GSAT (Greedy SAT): Pseudo-Code

Hilfsfunktionen:

- violated(Δ, I): Anzahl Klauseln in Δ, die I nicht erfüllt
- flip(I, v): Die Belegung, die aus I entsteht, wenn man die Belegung der Aussagevariable v ändert

function GSAT(Δ):

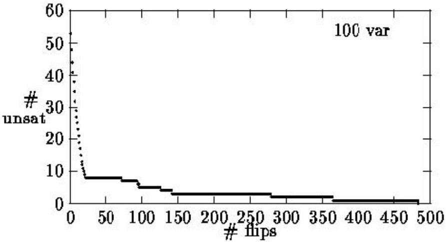
repeat *max-tries* **times**:
    $I :=$ a random truth assignment
    repeat *max-flips* **times**:
        if $I \models \Delta$:
            return I
        $V_{\text{greedy}} :=$ the set of variables v occurring in Δ
                for which violated(Δ, flip(I, v)) is minimal
        randomly select $v \in V_{\text{greedy}}$
        $I :=$ flip(I, v)
return no solution found

GSAT: Diskussion

GSAT hat übliche Merkmale von lokalen Suchverfahren:

- Hill-Climbing
- Zufall (allerdings relativ wenig!)
- Neustarts

empirisch wird viel Zeit auf Plateaus verbracht:



Lokale Suche: Walksat

Walksat: Pseudo-Code

lost(Δ, I, v): #Klauseln in Δ, die I erfüllt, aber flip(I, v) nicht

function Walksat(Δ):

repeat *max-tries* **times**:
  I := a random truth assignment
  repeat *max-flips* **times**:
    if $I \models \Delta$:
      return I
    C := randomly chosen unsatisfied clause in Δ
    if there is a variable v in C with lost$(\Delta, I, v) = 0$:
      V_{choices} := all such variables
    else with probability p_{noise}:
      V_{choices} := all variables occurring in C
    else:
      V_{choices} := variables v in C that minimize lost(Δ, I, v)
    randomly select $v \in V_{\text{choices}}$
    I := flip(I, v)
return no solution found

Walksat vs. GSAT

Vergleich GSAT vs. Walksat:

- sehr viel mehr Zufall in Walksat
  durch zufällige Wahl der betrachteten Klausel
- auch „unintuitive“ Schritte, die die Zahl der verletzten Klauseln erst mal erhöhen, sind bei Walksat meistens möglich

$\leadsto$ geringere Gefahr, in lokalen Minima stecken zu bleiben

Wie schwierig ist SAT?

Wie schwierig ist SAT in der Praxis?

- SAT ist NP-vollständig

$\rightsquigarrow$ Algorithmen wie DPLL benötigen im schlechtesten Fall exponentielle Zeit

- Wie sieht es im Durchschnitt aus?
- hängt davon ab, über welche Probleminstanzen der Durchschnitt gebildet wird

SAT: polynomielle durchschnittliche Laufzeit

Gute Nachrichten (Goldberg 1979)

Konstruierte zufällige KNF-Formeln mit n Variablen und k Klauseln wie folgt:

In jeder Klausel taucht jede Variable

- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ positiv,
- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ negativ,
- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gar nicht auf.

Dann ist die Laufzeit von DPLL polynomiell in n und k.

$\leadsto$ leider kein sehr realistisches Modell für praktisch interessante KNF-Formeln (fast alle Zufallsformeln erfüllbar)

Phasenübergänge

Wie finden wir interessante zufällige Probleme?

Vermutung von Cheeseman et al.:

Cheeseman et al., IJCAI 1991

Alle NP-vollständigen Probleme haben mindestens einen Grössenparameter, für den die schwierigen Probleminstanzen in der Nähe eines kritischen Werts für diesen Parameter liegen.

Dieser so genannte Phasenübergang trennt zwei Problemregionen, z. B. eine zu stark eingeschränkte (over-constrained) von einer zu schwach eingeschränkten (under-constrained).

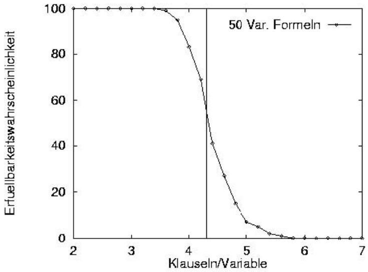
$\rightsquigarrow$ bestätigt z. B. für Graphfärbung, Hamilton-Pfade und SAT

Phasenübergänge für 3-SAT

Problemmodell von Mitchell et al., AAAI 1992

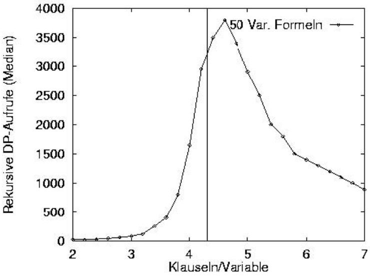
- feste Klausellänge 3
- wähle in jeder Klausel die Variablen zufällig
- Literale sind mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ positiv bzw. negativ

kritischer Parameter: Anz. Klauseln geteilt durch Anz. Variablen
Phasenübergang bei Verhältnis von ca. 4.3



Phasenübergang bei DPLL

DPLL zeigt hohe Laufzeit in der Nähe des Phasenübergangs:



Phasenübergang: intuitive Erklärung

- Wenn es sehr viele Klauseln gibt,
  das Problem daher mit hoher Wahrscheinlichkeit unlösbar ist,
  wird das schnell durch Unit-Propagation nachgewiesen.
- Wenn es sehr wenige Klauseln gibt,
  gibt es sehr viele erfüllende Belegungen,
  und es ist leicht, eine zu finden.
- Nahe des Phasenübergangs gibt es viele „Fast-Lösungen“,
  die vom Suchalgorithmen verfolgt werden müssen.

Ausblick

Stand der Wissenschaft

- SAT-Forschung allgemein:
  $\rightsquigarrow$ `http://www.satlive.org/`
- SAT-Konferenzen seit 1996; seit 2000 jedes Jahr
  $\rightsquigarrow$ `http://www.satisfiability.org/`
- Wettbewerbe für SAT-Algorithmen seit 1992
  $\rightsquigarrow$ `http://www.satcompetition.org/`
  - grösste Instanzen haben mehr als 1'000'000 Literale
  - verschiedene Disziplinen (z. B. SAT vs. SAT+UNSAT; industrielle vs. zufällige Instanzen)

Weiterführende Themen

DPLL-basierte SAT-Algorithmen:

- effiziente Implementierungstechniken
- gute Variablenordnungen
- clause learning

lokale Suchalgorithmen:

- effiziente Implementierungstechniken
- adaptive Suchverfahren („schwierige“ Klauseln werden mit der Zeit erkannt und priorisiert)

Zusammenfassung

Zusammenfassung (1)

- Lokale Suche für SAT sucht im Raum der Interpretationen; Nachbarn: Belegungen, die nur in einer Variable anders sind
- haben typische Eigenschaften lokaler Suchverfahren: Bewertungsfunktionen, Randomisierung, Neustarts
- Beispiel: GSAT (Greedy SAT)
  - Hill-Climbing mit Heuristikfunktion: #unerfüllte Klauseln
  - Randomisierung durch Tie-Breaking und Neustarts
- Beispiel: Walksat
  - fokussiert in jeder Iteration auf eine zufällig ausgewählte unerfüllte Klausel
  - folgt nicht immer der Heuristik, sondern injiziert Rauschen
  - dadurch mehr Randomisierung als GSAT und weniger Gefahr, in lokalen Minima zu bleiben

Zusammenfassung (2)

- genauere Analyse von SAT zeigt: das Problem ist NP-vollständig, aber nicht alle Instanzen sind schwer
- zufällig erzeugte 3SAT-Instanzen sind leicht zu erfüllen, wenn sie sehr wenige Klauseln beinhalten und leicht als unerfüllbar zu zeigen, wenn sie sehr viele Klauseln beinhalten
- dazwischen scharfer Phasenübergang