

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

27. Aussagenlogik: Logisches Schliessen und Resolution

Malte Helmert

Universität Basel

28. April 2014

Aussagenlogik: Überblick

Kapitelüberblick Aussagenlogik:

- 26. Grundlagen
- 27. Logisches Schliessen und Resolution
- 28. DPLL-Algorithmus
- 29. Lokale Suche und Ausblick

Logisches Schliessen

Logisches Schliessen: Intuition

Logisches Schliessen: Intuition

- Formeln repräsentieren im Allgemeinen nur eine unvollständige Beschreibung der Welt.
- Oftmals möchte man wissen, ob eine Formel aus einer (Menge von) anderen **logisch folgt**.
- Was bedeutet das?

Logisches Schliessen: Intuition

- **Beispiel:** $\varphi = (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg P) \wedge S$
- S gilt in allen Modellen von φ .
Wie ist es für P , Q und R ?

↪ Betrachte alle Modelle für φ :

P	Q	R	S
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

Beobachtung

- In allen Modellen für φ gilt auch $Q \vee R$.
- Wir sagen: $Q \vee R$ **folgt logisch** aus φ .

Logisches Schliessen: Formal

Definition (Logische Folgerung)

Sei Φ eine Formelmenge. Eine Formel ψ **folgt logisch** aus Φ , in Symbolen $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von Φ auch Modelle von ψ sind.

Anders gesagt muss für jede Interpretation I gelten:
wenn $I \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt, dann muss auch $I \models \psi$ gelten.

Frage

Wie können wir automatisch berechnen, ob $\Phi \models \psi$ gilt?

- Eine Möglichkeit: Wahrheitstabelle. (Wie?)
- Geht es auch „besser“, d.h., (potentiell) ohne die komplette Wahrheitstabelle aufbauen zu müssen?

Logisches Schliessen: Deduktionssatz

Satz (Deduktionssatz)

Sei Φ eine endliche Menge von Formeln, ψ eine Formel. Dann gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \left(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi \right) \rightarrow \psi \text{ ist eine Tautologie}$$

Logisches Schliessen: Deduktionssatz

Satz (Deduktionssatz)

Sei Φ eine endliche Menge von Formeln, ψ eine Formel. Dann gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \left(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi \right) \rightarrow \psi \text{ ist eine Tautologie}$$

Beweis.

$$\Phi \models \psi$$

gdw. für alle Interpr. I : Wenn $I \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, dann $I \models \psi$

gdw. für alle Interpr. I : Wenn $I \models \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi$, dann $I \models \psi$

gdw. für alle Interpr. I : $I \not\models \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi$ oder $I \models \psi$

gdw. für alle Interpr. I : $I \models (\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi) \rightarrow \psi$

gdw. $(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi) \rightarrow \psi$ ist Tautologie



Logisches Schliessen

Anwendung des Deduktionssatz

Logisches Schliessen kann auf Testen von Allgemeingültigkeit zurückgeführt werden.

Algorithmus

Frage: Gilt $\Phi \models \psi$?

- 1 Prüfe, ob $(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi) \rightarrow \psi$ eine Tautologie ist.
- 2 Wenn ja, dann $\Phi \models \psi$. Ansonsten $\Phi \not\models \psi$.

Im Folgenden: Wie kann Allgemeingültigkeit „effizient“ geprüft werden, d.h. ohne komplette Wahrheitstabellen zu bilden?

Resolution

Klauselmengen

Für den Rest des Kapitels:

- **Voraussetzung:** Formeln sind in konjunktiver Normalform
- Darstellung von Klauseln als **Menge C von Literalen**
- Darstellung von Formeln als **Menge Δ von Klauseln**

Beispiel

Sei $\varphi = (P \vee Q) \wedge \neg P$.

- φ ist in konjunktiver Normalform,
- φ besteht aus den Klauseln $(P \vee Q)$ und $\neg P$.
- Darstellung von φ als Menge von Mengen von Literalen:
 $\{\{P, Q\}, \{\neg P\}\}$

Unterscheide $\square$ (leere Klausel) vs. $\emptyset$ (leere Menge von Klauseln).

Resolution: Idee

Beobachtung

- Prüfen auf Allgemeingültigkeit kann auf Prüfen von Unerfüllbarkeit zurückgeführt werden.
- Formel φ allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar.

Resolution: Idee

- Methode, um Unerfüllbarkeit einer Formel φ zu prüfen.
- **Idee:** Leite aus φ neue Formeln ab, die aus φ logisch folgen.
- Wenn leere Klausel $\square$ abgeleitet werden kann, dann ist φ unerfüllbar.

Die Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{\ell\}, C_2 \cup \{\bar{\ell}\}}{C_1 \cup C_2}$$

- „Aus $C_1 \cup \{\ell\}$ und $C_2 \cup \{\bar{\ell}\}$ kann man $C_1 \cup C_2$ folgern.“
- $C_1 \cup C_2$ ist **Resolvent** der **Elternklauseln** $C_1 \cup \{\ell\}$ und $C_2 \cup \{\bar{\ell}\}$.
- Die Literale ℓ und $\bar{\ell}$ heissen **Resolutionsliterale**, die zugehörige Proposition **Resolutionsvariable**.
- Der Resolvent folgt logisch aus den Elternklauseln. (Warum?)

Beispiel

- Resolvent von $\{A, B, \neg C\}$ und $\{A, D, C\}$?
- Resolventen von $\{\neg A, B, \neg C\}$ und $\{A, D, C\}$?

Resolution: Ableitungen

Definition (Ableitung)

Notation: $R(\Delta) = \Delta \cup \{C \mid C \text{ ist Resolvent von 2 Klauseln in } \Delta\}$

Eine Klausel D kann aus Δ **abgeleitet** werden, in Symbolen $\Delta \vdash D$, wenn es eine Folge von Klauseln $C_1, \dots, C_n = D$ gibt, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $C_i \in R(\Delta \cup \{C_1, \dots, C_{i-1}\})$

Lemma (Korrektheit der Resolution)

Wenn $\Delta \vdash D$, dann $\Delta \models D$.

Gilt auch die Rückrichtung (**Vollständigkeit**)?

Resolution: Vollständigkeit?

Rückrichtung des Lemmas gilt nicht im Allgemeinen.

Beispiel:

- $\{\{A, B\}, \{\neg B, C\}\} \models \{A, B, C\}$, aber
- $\{\{A, B\}, \{\neg B, C\}\} \not\models \{A, B, C\}$

Aber: Rückrichtung gilt für Spezialfall der leeren Klausel $\square$.

Satz (Widerlegungsvollständigkeit der Resolution)

Δ ist unerfüllbar gdw. $\Delta \vdash \square$

Folgerung:

- Resolution ist ein vollständiges Beweisverfahren, um Unerfüllbarkeit zu testen.
- Resolution kann für logisches Schliessen eingesetzt werden, indem man auf einen Unerfüllbarkeitstest reduziert.

Resolution: Beispiel

Sei $\Phi = \{P \vee Q, \neg P\}$. Gilt $\Phi \models Q$?

Lösung

- Prüfe hierzu: Ist $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ Tautologie?
- Äquivalent: Ist $((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q$ unerfüllbar?
- Resultierende Klauselmenge Φ' : $\{\{P, Q\}, \{\neg P\}, \{\neg Q\}\}$
- Resolution von $\{P, Q\}$ mit $\{\neg P\}$ ergibt $\{Q\}$.
- Resolution von $\{Q\}$ mit $\{\neg Q\}$ ergibt $\square$.
- Beobachtung: Leere Klausel ableitbar, also Φ' unerfüllbar.
- Folgerung: $\Phi \models Q$

Resolution: Diskussion

- Resolution ist eine vollständige Beweismethode, um eine Formel auf Unerfüllbarkeit zu testen.
- Im schlechtesten Fall kann ein Resolutionsbeweis exponentiell lange dauern.
- In der Praxis ist eine **Strategie** hilfreich, welche Resolutionsschritte als nächstes angewandt werden.
- Im Folgekapitel lernen wir den **DPLL**-Algorithmus kennen, der als Kombination der Resolution mit Backtracking verstanden werden kann.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Logisches Schliessen**: aus Formel φ **folgt** die Formel ψ , falls alle Modelle von φ auch Modelle von ψ sind
 - Logisches Schliessen kann man mit dem **Deduktionssatz** auf Test auf Allgemeingültigkeit zurückführen
 - Test auf Allgemeingültigkeit kann man auf Test auf Unerfüllbarkeit zurückführen
 - **Resolution** ist eine **widerlegungsvollständige** Beweismethode für Formeln in konjunktiver Normalform
- ~> kann verwendet werden, um zu testen, ob eine Klauselmengue unerfüllbar ist