

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

26. Aussagenlogik: Grundlagen

Malte Helmert

Universität Basel

28. April 2014

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

28. April 2014 — 26. Aussagenlogik: Grundlagen

26.1 Motivation

26.2 Syntax

26.3 Semantik

26.4 Normalformen

26.5 Zusammenfassung

Einordnung

Einordnung:

Aussagenlogik

Umgebung:

- ▶ **statisch** vs. dynamisch
- ▶ **deterministisch** vs. nicht-deterministisch vs. stochastisch
- ▶ **vollständig** vs. partiell vs. nicht **beobachtbar**
- ▶ **diskret** vs. stetig
- ▶ **ein Agent** vs. mehrere Agenten

Lösungsansatz:

- ▶ problemspezifisch vs. **allgemein** vs. lernend

(Aber Anwendungen auch in reichhaltigeren Umgebungen.)

Aussagenlogik: Überblick

Kapitelüberblick Aussagenlogik:

- ▶ **26. Grundlagen**
- ▶ 27. Logisches Schliessen und Resolution
- ▶ 28. DPLL-Algorithmus
- ▶ 29. Lokale Suche und Ausblick

26.1 Motivation

Aussagenlogik: Motivation

Diese Woche: Aussagenlogik

- ▶ Modellierung und Repräsentation von Problemen und Wissen
- ▶ Grundlage **allgemeiner** Problembeschreibungen und Lösungsstrategien
($\rightsquigarrow$ Handlungsplanung, nächste Woche)
- ▶ erlaubt automatisches **logisches Schliessen** (Thema heute)

Zusammenhang zu CSPs

- ▶ **letzte Woche**: Constraint-Satisfaction-Probleme
- ▶ Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik kann als **nicht-binäres CSP** über $\{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}$ aufgefasst werden
- ▶ Formel kodiert die Constraints
- ▶ Gesucht: erfüllende Zuweisung von Werten zu Variablen
- ▶ SAT-Algorithmen für diese Probleme: $\rightsquigarrow$ DPLL (**Freitag**)

Aussagenlogik: Beschreibung von Zustandsräumen

Aussagevariablen für Missionare und Kannibalen:

two-missionaries-on-left-shore
one-cannibal-on-left-shore
boat-on-left-shore
...

- ▶ Problembeschreibung verständlich für allgemeine Problemlöser
- ▶ Zustände repräsentiert als Wahrheitswerte der atomaren **Propositionen** (Aussagevariablen)

Aussagenlogik: Intuition

Propositionen: atomare (nicht weiter teilbare)
Aussagen über die Welt.

Propositionen bilden mit **logischen Verknüpfungen**
wie „und“, „oder“ und „nicht“ die aussagenlogischen Formeln.

26.2 Syntax

Syntax

Σ Alphabet von Propositionen
(z. B. $\{P, Q, R, \dots\}$ oder $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$).

Definition (aussagenlogische Formel)

- ▶ $\top$ und $\perp$ sind Formeln.
- ▶ Jede Proposition aus Σ ist eine (atomare) Formel.
- ▶ Wenn φ eine Formel ist, dann auch $\neg\varphi$ (**Negation**).
- ▶ Wenn φ und ψ Formeln sind, dann auch
 - ▶ $\varphi \wedge \psi$ (**Konjunktion**)
 - ▶ $\varphi \vee \psi$ (**Disjunktion**)
 - ▶ $\varphi \rightarrow \psi$ (**Implikation**)

Bindungsstärke: $(\neg) > (\wedge) > (\vee) > (\rightarrow)$
(bei Bedarf Klammern setzen)

26.3 Semantik

Semantik

Eine Formel ist **wahr** oder **falsch**;
je nach dem, wie ihre Propositionen **interpretiert** werden.

Semantik: Intuition

- ▶ Propositionen sind entweder wahr oder falsch.
Dies wird durch eine **Interpretation** bestimmt.
- ▶ Wahrheitswert einer Formel folgt
aus Wahrheitswerten ihrer Propositionen.

Beispiel

$$\varphi = (P \vee Q) \wedge R$$

Wahrheitswert für beispielhafte Interpretationen:

- ▶ Wenn P und Q falsch sind und R wahr ist, dann ist φ falsch.
- ▶ Wenn P und R wahr sind, dann ist auch φ wahr
(unabhängig vom Wahrheitswert von Q).

Semantik: formal

- ▶ definiert über **Interpretation** $I : \Sigma \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$
- ▶ Interpretation I ist **Belegung** der Propositionen in Σ .
- ▶ Wann ist eine Formel φ unter einer Interpretation I wahr?
Symbolisch: Wann gilt $I \models \varphi$?

Definition ($I \models \varphi$)

- ▶ $I \models \top$ und $I \not\models \perp$
- ▶ $I \models P$ gdw. $I(P) = \mathbf{T}$ für $P \in \Sigma$
- ▶ $I \models \neg\varphi$ gdw. $I \not\models \varphi$
- ▶ $I \models \varphi \wedge \psi$ gdw. $I \models \varphi$ und $I \models \psi$
- ▶ $I \models \varphi \vee \psi$ gdw. $I \models \varphi$ oder $I \models \psi$
- ▶ $I \models \varphi \rightarrow \psi$ gdw. $I \not\models \varphi$ oder $I \models \psi$
- ▶ $I \models \Phi$ für eine Formelmenge Φ gdw. $I \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$

Beispiele

Beispiel (Interpretation I)

$$I = \{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{F}, S \mapsto \mathbf{F}\}$$

Welche Formeln sind unter I wahr?

- ▶ $\varphi_1 = \neg(P \wedge Q) \wedge (R \wedge \neg S)$. Gilt $I \models \varphi_1$?
- ▶ $\varphi_2 = (P \wedge Q) \wedge \neg(R \wedge \neg S)$. Gilt $I \models \varphi_2$?
- ▶ $\varphi_3 = (R \rightarrow P)$. Gilt $I \models \varphi_3$?

Terminologie

Definition (Modell)

Eine Interpretation I heisst **Modell** von φ wenn $I \models \varphi$.

Definition (erfüllbar etc.)

Eine Formel φ heisst

- ▶ **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation I mit $I \models \varphi$ gibt.
- ▶ **unerfüllbar**, wenn φ nicht erfüllbar ist.
- ▶ **falsifizierbar**, wenn es eine Interpretation I mit $I \not\models \varphi$ gibt.
- ▶ **allgemeingültig** (= **gültig** = eine **Tautologie**),
wenn $I \models \varphi$ für alle Interpretationen I gilt.

Definition (logische Äquivalenz)

Formeln φ und ψ heissen **logisch äquivalent** ($\varphi \equiv \psi$),
wenn für alle Interpretation I gilt: $I \models \varphi$ gdw. $I \models \psi$.

Wahrheitstabelle

Wahrheitstabelle

Wie kann (Un-) Erfüllbarkeit, Falsifizierbarkeit, Allgemeingültigkeit automatisch für eine Formel bestimmt werden?

↪ einfache Methode: **Wahrheitstabelle**

Beispiel: Ist $\varphi = ((P \vee H) \wedge \neg H) \rightarrow P$ allgemeingültig?

P	H	$P \vee H$	$((P \vee H) \wedge \neg H)$	$((P \vee H) \wedge \neg H) \rightarrow P$
F	F	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	T
T	T	T	F	T

$I \models \varphi$ für alle Interpretationen I $\rightsquigarrow \varphi$ ist allgemeingültig.

► Erfüllbarkeit, Falsifizierbarkeit, Unerfüllbarkeit?

26.4 Normalformen

Normalformen: Begriffe

Definition (Literal)

Wenn $P \in \Sigma$, dann heissen die Formeln P sowie $\neg P$ **Literale**.

P heisst **positives Literal**, $\neg P$ heisst **negatives Literal**.

Das **komplementäre Literal** zu P ist $\neg P$ und umgekehrt.

Wenn ℓ ein Literal ist, bezeichnet $\bar{\ell}$ das komplementäre Literal zu ℓ .

Definition (Klausel)

Eine Disjunktion von 0 oder mehr Literalen heisst **Klausel**.

Die **leere Klausel** $\perp$ wird auch als $\square$ geschrieben.

Klauseln aus nur einem Literal heissen **Einheitsklauseln**.

Definition (Monom)

Eine Konjunktion von 0 oder mehr Literalen heisst **Monom**.

Normalformen

Definition (Normalformen)

Formel φ ist in **konjunktiver Normalform** (KNF, Klauselform), wenn sie eine Konjunktion von 0 oder mehr Klauseln ist:

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \right)$$

Formel φ ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von 0 oder mehr Monomen ist:

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \right)$$

Normalformen

Zu jeder Formel gibt es logisch äquivalente Formeln in KNF und in DNF.

Umwandlung in KNF

Wichtige Umformungsregeln für Umwandlung in KNF:

- ▶ $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ ($(\rightarrow)$ -Elimination)
- ▶ $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ (De Morgan)
- ▶ $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (De Morgan)
- ▶ $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (Doppelnegation)
- ▶ $(\varphi \wedge \psi) \vee \eta \equiv (\varphi \vee \eta) \wedge (\psi \vee \eta)$ (Distributivität)

Es gibt Formeln, bei denen jede äquivalente KNF- bzw. DNF-Formel exponentiell länger ist.

26.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung (1)

- ▶ **Aussagenlogik** bildet die Basis für allgemeine Repräsentation von Problemen und von Wissen.
- ▶ **Propositionen** (atomare Formeln) sind nicht weiter teilbare Aussagen über die Welt.
- ▶ **Aussagenlogische Formeln** kombinieren atomare Formeln mit $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ zu komplexeren Aussagen.
- ▶ **Interpretationen** legen fest, welche atomaren Formeln wahr sind und welche falsch.

Zusammenfassung (2)

- ▶ wichtige Begriffe:
 - ▶ **Modell**
 - ▶ **erfüllbar**, **unerfüllbar**, **falsifizierbar**, **allgemeingültig**
 - ▶ **logisch äquivalent**
- ▶ bestimmte Arten von Formeln:
 - ▶ **atomare Formeln** und **Literale**
 - ▶ **Klauseln** und **Monome**
 - ▶ **konjunktive Normalform** und **disjunktive Normalform**