Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

24. Constraint-Satisfaction-Probleme: Constraint-Graphen

Malte Helmert

Universität Basel

25. April 2014

Constraint-Satisfaction-Probleme: Überblick

Kapitelüberblick Constraint-Satisfaction-Probleme:

- 19.–20. Einführung
- 21.–23. Kernalgorithmen
- 24.–25. Problemstruktur
  - 24. Constraint-Graphen
  - 25. Zerlegungsmethoden

Constraint-Graphen

Motivation

- Zum Lösen eines Constraint-Netzes müssen bei n Variablen mit jeweils k Werten bis zu k^n Belegungen getestet werden.
- Inferenz kann diese Explosion der Möglichkeiten oft abmildern, aber nicht immer verhindern.
- Viele praktisch relevante Constraint-Netze sind aber dennoch effizient lösbar, wenn man ihre spezielle Struktur ausnutzt.

Constraint-Graph

Definition (Constraint-Graph)

Sei $\mathcal{C} = \langle V, \mathrm{dom}, (R_{uv}) \rangle$ ein Constraint-Netz.

Der Constraint-Graph von $\mathcal{C}$ ist der Graph, dessen Knoten V sind und der eine Kante zwischen u und v genau dann hat, wenn R_{uv} ein nichttrivialer Constraint ist.

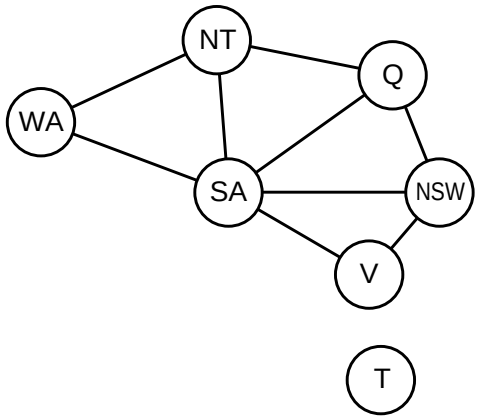
Constraint-Graph

Definition (Constraint-Graph)

Sei $\mathcal{C} = \langle V, \text{dom}, (R_{uv}) \rangle$ ein Constraint-Netz.

Der Constraint-Graph von $\mathcal{C}$ ist der Graph, dessen Knoten V sind und der eine Kante zwischen u und v genau dann hat, wenn R_{uv} ein nichttrivialer Constraint ist.

Beispiel: Färbung von Australiens Bundesstaaten und Territorien



Unzusammenhängende Graphen

Unzusammenhängende Constraint-Graphen

Satz (Unzusammenhängende Constraint-Graphen)

Wenn der Constraint-Graph von $\mathcal{C}$ in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt, reicht es aus, das Teilproblem für jede Komponente separat zu lösen.

Die Vereinigung der Teillösungen ist dann eine Lösung für $\mathcal{C}$.

Unzusammenhängende Constraint-Graphen

Satz (Unzusammenhängende Constraint-Graphen)

Wenn der Constraint-Graph von $\mathcal{C}$ in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt, reicht es aus, das Teilproblem für jede Komponente separat zu lösen.

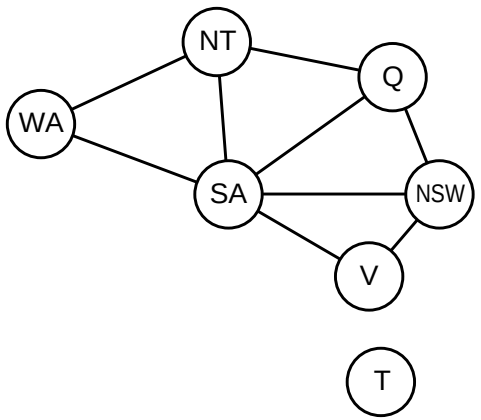
Die Vereinigung der Teillösungen ist dann eine Lösung für $\mathcal{C}$.

Beweis.

Eine aus Teillösungen zusammengesetzte Lösung erfüllt alle Constraints, die innerhalb eines Teilproblems liegen.
Es gibt keine nichttrivialen Constraints, die nicht innerhalb eines Teilproblems liegen. □

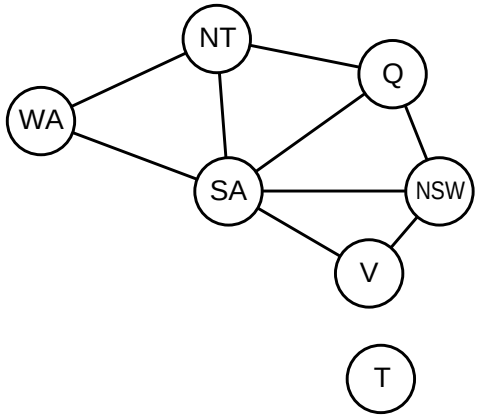
Unzusammenhängende Constraint-Graphen: Beispiel

Beispiel: Tasmanien separat vom Rest von Australien einfärben



Unzusammenhängende Constraint-Graphen: Beispiel

Beispiel: Tasmanien separat vom Rest von Australien einfärben



Weiteres Beispiel:

Zerfalle ein Problem mit $k = 2$, $n = 30$ in drei Teile der Grösse 10.

Ersparnis?

Bäume

Bäume als Constraint-Graphen

Satz (Bäume als Constraint-Graphen)

Sei $\mathcal{C}$ ein Constraint-Netz mit n Variablen und maximaler Wertebereichsgrösse k, dessen Constraint-Graph ein Baum oder Wald ist (d. h. keine Zyklen enthält).

Dann kann $\mathcal{C}$ in Zeit $O(nk^2)$ gelöst werden (bzw. die Nichtexistenz einer Lösung bewiesen werden).

Zahlenbeispiel: $k = 5, n = 10$

$\rightsquigarrow k^n = 9765625,\ nk^2 = 250$

Bäume als Constraint-Graphen: Algorithmus

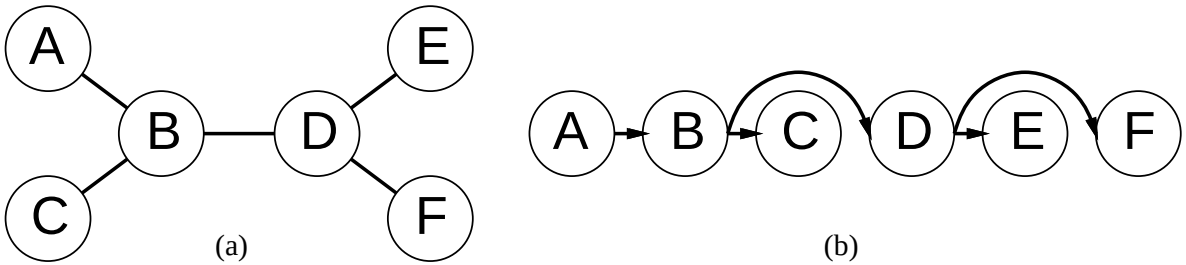
Algorithmus für Baum:

- Bilde gerichteten Baum, indem beliebige Variable zur Wurzel erklärt wird.
- Ordne Variablen $v_1, \ldots, v_n$ so, dass Vater immer vor Kindern kommt.
- Für $i \in \langle n, n-1, \ldots, 2 \rangle$: rufe revise$(v_{\text{parent}(i)}, v_i)$ auf
  $\rightsquigarrow$ jeder Knoten ist kantenkonsistent in Bezug auf Kinder
- wenn dabei ein Wertebereich leer wird: Problem unlösbar
- Ansonsten löse mit BacktrackingWithInference mit Variablenordnung $v_1, \ldots, v_n$ und Forward Checking
  $\rightsquigarrow$ Lösung wird ohne Backtracking-Schritte gefunden

Beweis: $\rightsquigarrow$ Übungen

Bäume als Constraint-Graphen: Beispiel

Constraint Netz $\rightsquigarrow$ gerichteter Baum, geordnet:



Revise-Schritte:

- revise(D, F)
- revise(D, E)
- revise(B, D)
- revise(B, C)
- revise(A, B)

Lösungsfindung:

Backtracking mit Ordnung $A \prec B \prec C \prec D \prec E \prec F$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Constraint-Netze mit vielen Variablen können einfach zu lösen sein, wenn sie eine einfache Struktur haben.
- Constraint-Graph formalisiert diese Struktur
  - mehrere Zusammenhangskomponenten:
    Lösung als separate Instanzen für jede Komponente
  - Baum: Lösungsalgorithmus mit linearem Zeitaufwand
    in der Anzahl der Variablen