Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

22. Constraint-Satisfaction-Probleme: Kantenkonsistenz

Malte Helmert

Universität Basel

14. April 2014

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

14. April 2014 — 22. Constraint-Satisfaction-Probleme: Kantenkonsistenz

Constraint-Satisfaction-Probleme: Überblick

Kapitelüberblick Constraint-Satisfaction-Probleme:

- 19.–20. Einführung
- 21.–23. Kernalgorithmen
  - 21. Backtracking
  - 22. Kantenkonsistenz
  - 23. Pfadkonsistenz
- 24.–25. Problemstruktur

22.1 Inferenz

Inferenz

Inferenz

Herleiten zusätzlicher Constraints (hier: unär oder binär), die aus den bekannten Constraints logisch folgen, d. h. in allen Lösungen erfüllt sind.

Beispiel: Constraint-Netz mit Variablen v_1, v_2, v_3 mit Wertebereich $\{1, 2, 3\}$ und Constraints $v_1 < v_2$ und $v_2 < v_3$.

Wir können beispielsweise folgern:

- v_2 kann nicht 3 sein (neuer unärer Constraint = Einschränkung des Wertebereichs von v_2)
- $R_{v_1 v_2} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ kann verschärft werden zu $\{\langle 1, 2\rangle\}$ (verschärfter binärer Constraint)
- $v_1 < v_3$ („neuer“ binärer Constraint = trivialer Constraint verschärft)

Trade-off Suche vs. Inferenz

Inferenz formal

Inferenz ist Ersetzen des gegebenen Constraint-Netzes durch ein schärferes äquivalentes Netz.

Trade-off:

- je komplexer die Inferenz ist und
- je häufiger sie angewendet wird,
- desto weniger Suchknoten müssen durchsucht werden, aber
- desto mehr Zeitaufwand wird pro Suchknoten benötigt

Wo Inferenz verwenden?

Unterschiedliche Verwendungsmöglichkeiten für Inferenz:

- einmalig als Vorverarbeitung vor der Suche
- mit Suche kombiniert: bei jedem rekursiven Aufruf der Backtracking-Prozedur
  - bereits belegte Variablen $v \mapsto d$ können wie $\mathrm{dom}(v) = \{d\}$ verstanden werden $\rightsquigarrow$ mehr Schlussfolgerungen möglich
  - bei Backtracking müssen Verschärfungen durch Inferenz zurückgenommen werden, da sie die gegebene Belegung als Voraussetzung hatten
  - $\rightsquigarrow$ mächtig, aber eventuell teuer

Backtracking mit Inferenz

function BacktrackingWithInference($\mathcal{C}, \alpha$):

if α is inconsistent with $\mathcal{C}$:
    return inconsistent
if α is a total assignment:
    return α
$\mathcal{C}' := \langle V, \mathrm{dom}', (R'_{uv})\rangle :=$ copy of $\mathcal{C}$
apply inference to $\mathcal{C}'$
if $\mathrm{dom}'(v) \neq \emptyset$ for all variables v:
    select some variable v for which α is not defined
    for each $d \in$ copy of $\mathrm{dom}'(v)$ in some order:
        $\alpha' := \alpha \cup \{v \mapsto d\}$
        $\mathrm{dom}'(v) := \{d\}$
        $\alpha'' :=$ BacktrackingWithInference($\mathcal{C}', \alpha'$)
        if $\alpha'' \neq$ **inconsistent**:
            return α''
return inconsistent

Backtracking mit Inferenz: Diskussion

- inference ist ein Platzhalter:
  verschiedene Inferenzmethoden können eingesetzt werden
- Inferenzmethode kann Unlösbarkeit (gegeben α) erkennen und durch Leeren eines Wertebereichs signalisieren
- effizient implementierte Inferenz oft inkrementell:
  zuletzt belegtes Paar $v \mapsto d$ wird mitgeteilt und verwendet, um die Berechnung zu beschleunigen

22.2 Forward Checking

Forward Checking

Wir beginnen mit einer sehr einfachen Inferenz-Methode:

Forward Checking

Inferenz: Entferne alle Variablen-/Werte-Paare aus dom′, die mit bereits belegten Paaren im Konflikt stehen.

$\rightsquigarrow$ Definition von Konflikt im vorigen Kapitel

Inkrementelle Berechnung:

- Immer, wenn $v \mapsto d$ zur Belegung hinzugefügt wird, entferne alle mit $v \mapsto d$ im Konflikt stehenden Paare.

Forward Checking: Diskussion

Eigenschaften von Forward Checking:

- korrekte Inferenzmethode (erhält Äquivalenz)
- beeinflusst Wertebereiche (= unäre Constraints), aber nicht die binären Constraints
- macht Konsistenztest am Anfang der Backtracking-Prozedur überflüssig (Warum?)
- billige, aber dennoch oft nützliche Inferenz-Methode

$\rightsquigarrow$ selten eine gute Idee, nicht mindestens Forward Checking zu verwenden

Im Folgenden betrachten wir mächtigere Inferenzmethoden.

22.3 Kantenkonsistenz

Kantenkonsistenz: Definition

Definition (kantenkonsistent)

Sei $\mathcal{C} = \langle V, \mathrm{dom}, (R_{uv}) \rangle$ ein Constraint-Netz.

(a) Eine Variable $v \in V$ ist kantenkonsistent in Bezug auf eine andere Variable $v' \in V$, wenn für jeden Wert $d \in \mathrm{dom}(v)$ ein Wert $d' \in \mathrm{dom}(v')$ mit $\langle d, d' \rangle \in R_{vv'}$ existiert.

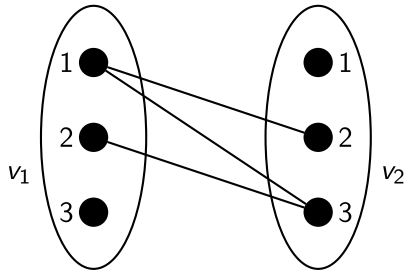
(b) Das Constraint-Netz $\mathcal{C}$ ist kantenkonsistent, wenn jede Variable $v \in V$ kantenkonsistent in Bezug auf jede andere Variable $v' \in V$ ist.

Anmerkungen:

- Definition für Variablenpaare ist asymmetrisch
- v immer kantenkonsistent in Bezug auf v', wenn Constraint zwischen v und v' trivial ist

Kantenkonsistenz: Beispiel

Betrachte ein Constraint-Netz mit Variablen v_1 und v_2, Wertebereichen $\mathrm{dom}(v_1) = \mathrm{dom}(v_2) = \{1, 2, 3\}$ und dem durch $v_1 < v_2$ beschriebenen Constraint.



Kantenkonsistenz von v_1 in Bezug auf v_2 und von v_2 in Bezug auf v_1 ist verletzt.

Herstellen von Kantenkonsistenz

- Herstellen von Kantenkonsistenz, d. h. Entfernen von Werten aus $\mathrm{dom}(v)$, die die Kantenkonsistenz von v in Bezug auf v' verletzen, ist eine korrekte Inferenzmethode. (Warum?)
- mächtiger als Forward Checking (Warum?)
- Im Folgenden betrachten wir Algorithmen zum Herstellen von Kantenkonsistenz.

Verarbeitung eines einzelnen Variablenpaars: revise

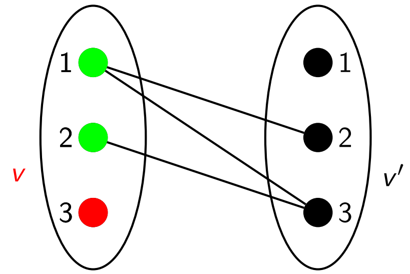
function revise($\mathcal{C}, v, v'$):
$\langle V, \text{dom}, (R_{uv})\rangle := \mathcal{C}$
for each $d \in \text{dom}(v)$:
  if there is no $d' \in \text{dom}(v')$ with $\langle d, d'\rangle \in R_{vv'}$:
    remove d from dom(v)

Eingabe: Constraint-Netz $\mathcal{C}$ und zwei Variablen v, v' von $\mathcal{C}$

Effekt: Macht v kantenkonsistent in Bezug auf v'.
Alle verletzenden Werte werden aus dom(v) entfernt.

Zeitaufwand: $O(k^2)$, wenn k maximale Wertebereichsgrösse
(geeignete Kodierung von (R_{uv}) und dom vorausgesetzt)

Beispiel: revise



Herstellen von Kantenkonsistenz: AC-1

function AC-1($\mathcal{C}$):
$\langle V, \text{dom}, (R_{uv})\rangle := \mathcal{C}$
repeat
  for each nontrivial constraint R_{uv}:
    revise($\mathcal{C}, u, v$)
    revise($\mathcal{C}, v, u$)
until no domain has changed in this iteration

Eingabe: Constraint-Netz $\mathcal{C}$

Effekt: transformiert $\mathcal{C}$ in äquivalentes kantenkonsistentes Netz

Zeitaufwand: $O(n \cdot e \cdot k^3)$, wenn n Variablen, e nichttriviale Constraints und k maximale Wertebereichsgrösse

AC-1: Diskussion

- AC-1 erfüllt seine Aufgabe, ist aber ineffizient.
- Oft werden Variablenpaare wieder und wieder überprüft, deren Wertebereiche sich nicht geändert haben.
- Diese Überprüfungen können eingespart werden.

$\rightsquigarrow$ effizienterer Algorithmus: AC-3

Herstellen von Kantenkonsistenz: AC-3

Idee: merke potenziell inkonsistente Variablenpaare in Queue

function AC-3($\mathcal{C}$):
$\langle V, \mathrm{dom}, (R_{uv})\rangle := \mathcal{C}$
queue $:= \emptyset$
for each nontrivial constraint R_{uv}:
  insert $\langle u, v\rangle$ into *queue*
  insert $\langle v, u\rangle$ into *queue*
while *queue* $\neq \emptyset$:
  remove an arbitrary element $\langle u, v\rangle$ from *queue*
  revise($\mathcal{C}$, u, v)
  if dom(u) changed in the call to revise:
    for each $w \in V \setminus \{u, v\}$ where R_{wu} is nontrivial:
      insert $\langle w, u\rangle$ into *queue*

AC-3: Diskussion

- *queue* kann eine beliebige Datenstruktur sein, die Einfügen und Entfernen erlaubt (Reihenfolge des Entfernens ist für Ergebnis egal)

$\rightsquigarrow$ effizient z. B. ein Stack

- AC-3 hat denselben Effekt wie AC-1: es stellt Kantenkonsistenz her
- Beweisidee: Invariante der **while**-Schleife: Wenn $\langle u, v\rangle \notin$ *queue*, dann u kantenkonsistent in Bezug auf v

AC-3: Zeitaufwand

Satz (Zeitaufwand von AC-3)

Sei $\mathcal{C}$ ein Constraint-Netz mit e nichttrivialen Constraints und maximaler Wertebereichsgrösse k.
Dann läuft AC-3 *in Zeit $O(e \cdot k^3)$.*

AC-3: Zeitaufwand (Beweis)

Beweis.

Betrachte ein Paar $\langle u, v\rangle$, für das ein nichttrivialer Constraint R_{uv} oder R_{vu} existiert. (Es gibt maximal $2e$ viele solche Paare.)

Jedes Mal, wenn das Paar in die Queue eingefügt wird (ausser beim ersten Mal), wurde zuvor der Wertebereich der zweiten beteiligten Variable reduziert.

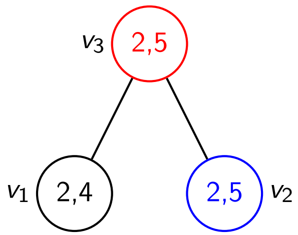
Das kann höchstens k mal passieren.

Damit wird jedes Paar $\langle u, v\rangle$ höchstens $k + 1$ mal in die Queue eingefügt $\rightsquigarrow$ insgesamt höchstens $O(ek)$ Einfügeoperationen.

Dies begrenzt die Zahl der **while**-Iterationen auf $O(ek)$, so dass die revise-Aufrufe höchstens Zeit $O(ek) \cdot O(k^2) = O(ek^3)$ benötigen. □

AC-3: Beispiel

Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\mathrm{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\mathrm{dom}(v_2) = \mathrm{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").

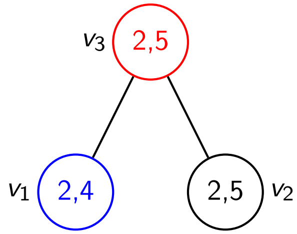


Queue

(v_1, v_3)
(v_3, v_1)
(v_2, v_3)
(v_3, v_2)

AC-3: Beispiel

Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\mathrm{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\mathrm{dom}(v_2) = \mathrm{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").

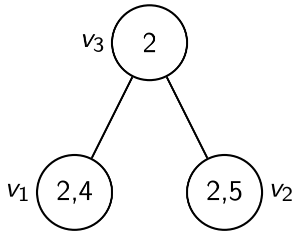


Queue

(v_1, v_3)
(v_3, v_1)

AC-3: Beispiel

Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\mathrm{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\mathrm{dom}(v_2) = \mathrm{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").

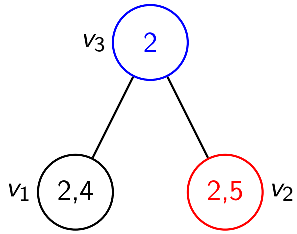


Queue

(v_1, v_3)
(v_2, v_3)

AC-3: Beispiel

Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\mathrm{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\mathrm{dom}(v_2) = \mathrm{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").

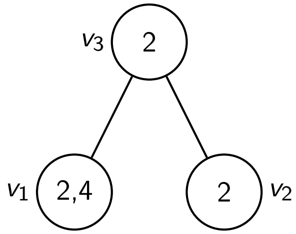


Queue

(v_1, v_3)
(v_2, v_3)

AC-3: Beispiel

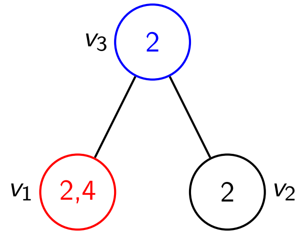
Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\text{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\text{dom}(v_2) = \text{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").



Queue
(v_1, v_3)

AC-3: Beispiel

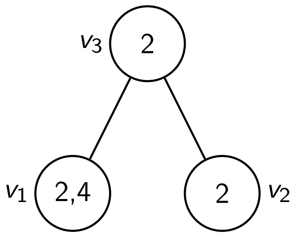
Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\text{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\text{dom}(v_2) = \text{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").



Queue
(v_1, v_3)

AC-3: Beispiel

Betrachte Constraint-Netz mit drei Variablen v_1, v_2, v_3 mit $\text{dom}(v_1) = \{2, 4\}$ und $\text{dom}(v_2) = \text{dom}(v_3) = \{2, 5\}$ sowie den Constraints $v_3 | v_1$ und $v_3 | v_2$ ("teilt").



Queue

22.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung: Inferenz

- Inferenz: Herleiten zusätzlicher Constraints, die aus den bekannten Constraints logisch folgen

$\rightsquigarrow$ schärferes äquivalentes Constraint-Netz
- Trade-off Suche vs. Inferenz
- Inferenz als Vorverarbeitung oder Integration in Backtracking

Zusammenfassung: Forward Checking, Kantenkonsistenz

- billige und einfache Inferenz: Forward Checking
  - entferne Werte, die zu belegten Werten in Konflikt stehen
- teurer und mächtiger: Kantenkonsistenz
  - entferne wiederholt Werte, die keinen passenden „Partner“ bei einer anderen Variable haben, bis Fixpunkt erreicht
  - effiziente Implementierung über AC-3: $O(ek^3)$ mit e: #nichttriviale Constraints, k: Wertebereichsgrösse