Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

21. Constraint-Satisfaction-Probleme: Backtracking

Malte Helmert

Universität Basel

11. April 2014

Constraint-Satisfaction-Probleme: Überblick

Kapitelüberblick Constraint-Satisfaction-Probleme:

- 19.–20. Einführung
- 21.–23. Kernalgorithmen
  - 21. Backtracking
  - 22. Kantenkonsistenz
  - 23. Pfadkonsistenz
- 24.–25. Problemstruktur

CSP-Algorithmen

CSP-Algorithmen

In den folgenden Kapiteln betrachten wir Lösungsalgorithmen für Constraint-Netze.

Grundkonzepte:

- Suche: systematisches Ausprobieren von partiellen Belegungen
- Backtracking: Verwerfen inkonsistenter partieller Belegungen
- Inferenz: Herleiten schärferer äquivalenter Constraints, um Suchraum zu verkleinern (Backtracking früher möglich)
  $\rightsquigarrow$ folgende Kapitel

Naives Backtracking

Naives Backtracking (= ohne Inferenz)

function NaiveBacktracking($\mathcal{C}, \alpha$):

$\langle V, \text{dom}, (R_{uv}) \rangle := \mathcal{C}$

if α is inconsistent with $\mathcal{C}$:
    return inconsistent

if α is a total assignment:
    return α

select some variable v for which α is not defined

for each $d \in \text{dom}(v)$ in some order:
    $\alpha' := \alpha \cup \{v \mapsto d\}$
    $\alpha'' :=$ NaiveBacktracking($\mathcal{C}, \alpha'$)
    if $\alpha'' \neq$ **inconsistent**:
        return α''
return inconsistent

Eingabe: Constraint-Netz $\mathcal{C}$ und partielle Belegung α von $\mathcal{C}$
(erster Aufruf: die leere Belegung $\alpha = \emptyset$)

Ergebnis: Lösung von $\mathcal{C}$ oder **inconsistent**

Ist das ein neuer Algorithmus?

Wir haben diesen Algorithmus schon gesehen:
Backtracking entspricht Tiefensuche (vgl. Kapitel 9)
mit folgendem Zustandsraum:

- Zustände: konsistente partielle Belegungen
- Anfangszustand: leere Belegung $\emptyset$
- Zielzustände: konsistente totale Belegungen
- Aktionen: $assign_{v,d}$ weist Variable v Wert $d \in \mathrm{dom}(v)$ zu
- Aktionskosten: alle 0 (alle Lösungen gleich gut)
- Transitionen:
  - für jede nicht-totale Belegung α wähle Variable $v = \mathrm{selected}(\alpha)$, die in α unbelegt ist
  - Transition $\alpha \xrightarrow{assign_{v,d}} \alpha \cup \{v \mapsto d\}$ für alle $d \in \mathrm{dom}(v)$

Warum Tiefensuche?

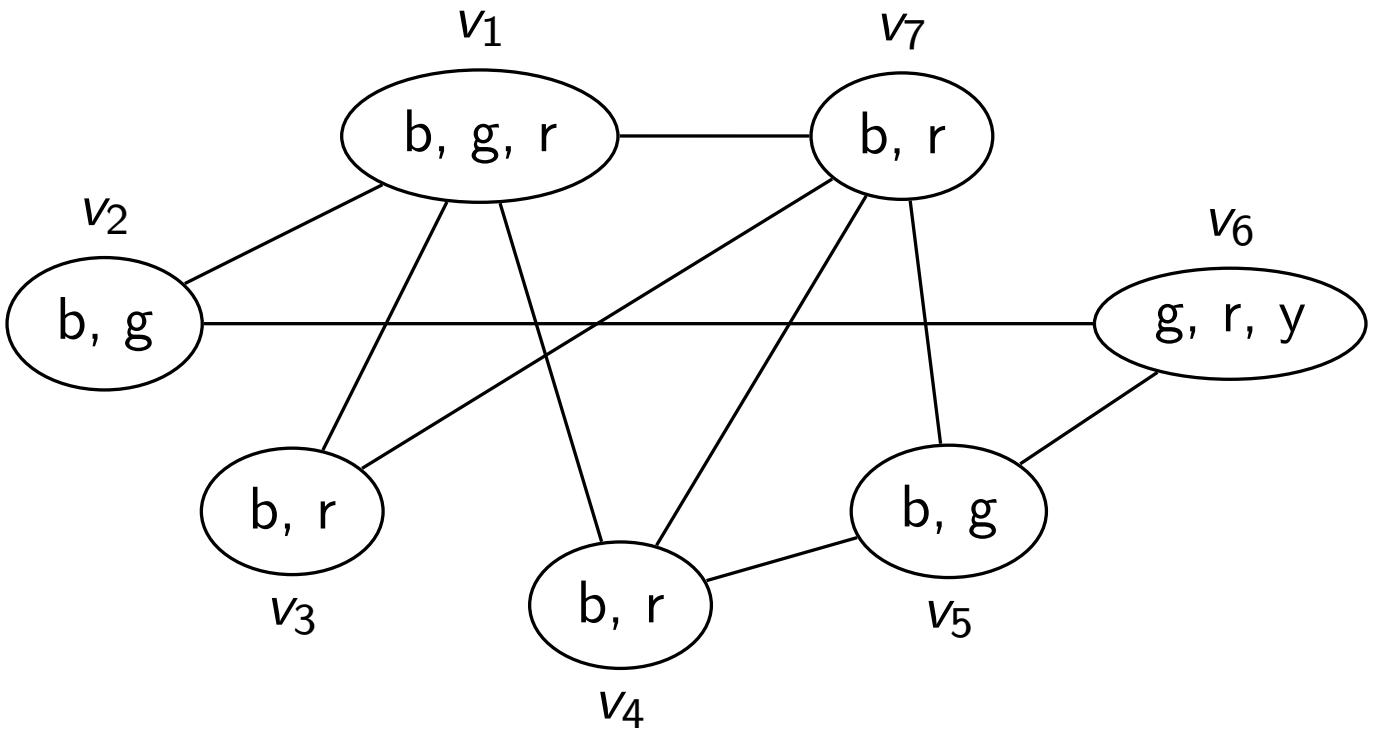
Tiefensuche ist für CSPs besonders geeignet:

- Pfadlänge beschränkt (durch Anzahl Variablen)
- Alle Lösungen in derselben Tiefe (in unterster Suchebene)
- Zustandsraum gerichteter Baum,
  Anfangszustand ist Wurzel $\rightsquigarrow$ keine Duplikate (Warum?)

Somit tritt keiner der für Tiefensuche problematischen Fälle auf.

Naives Backtracking: Beispiel

Betrachte das Constraint-Netz für folgendes Graphfärbungsproblem:

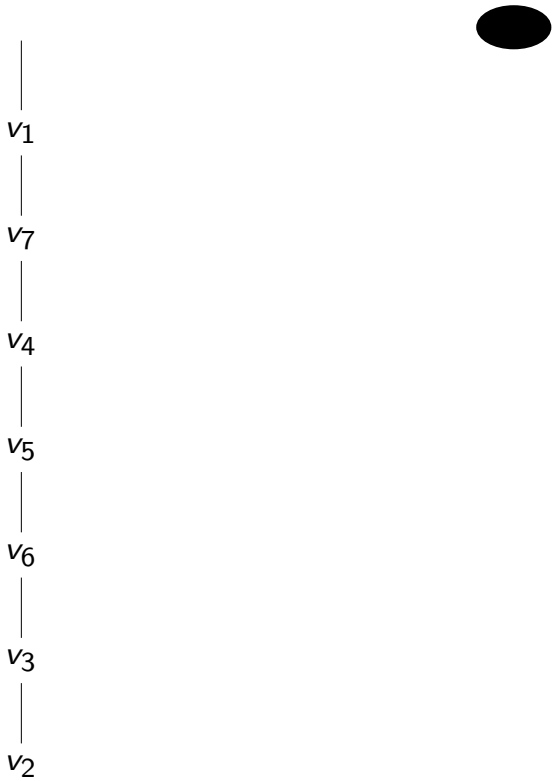


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

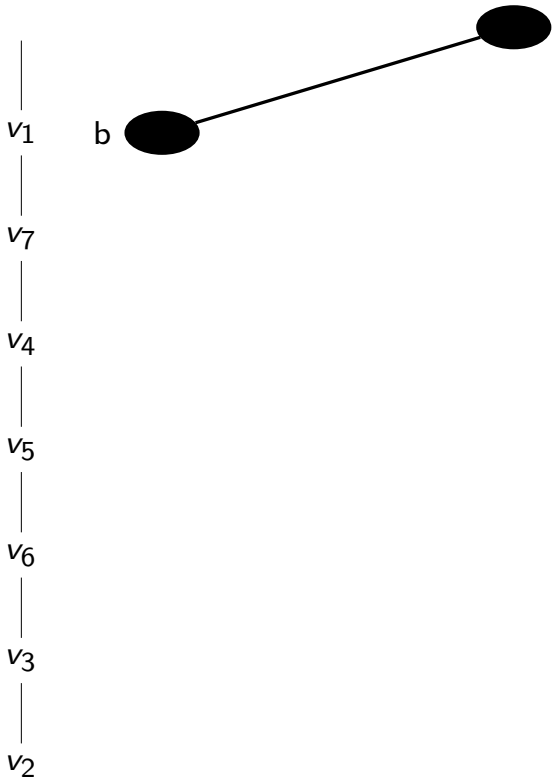


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

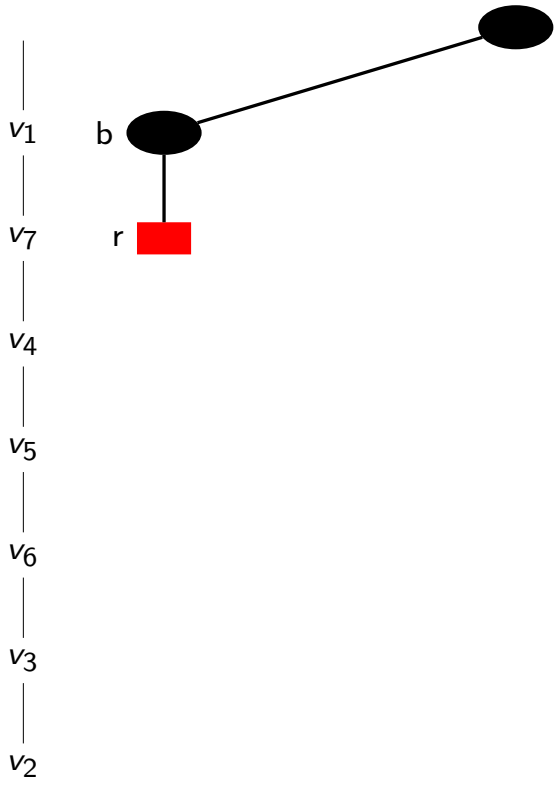


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

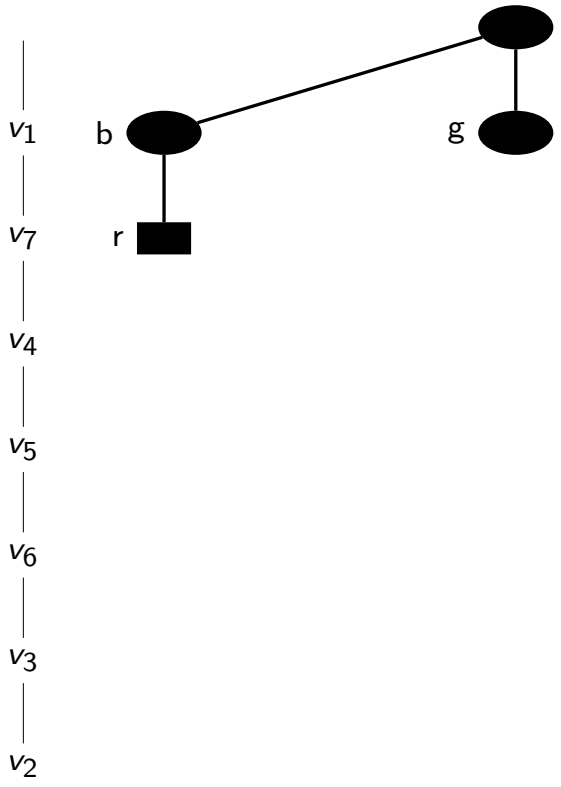


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

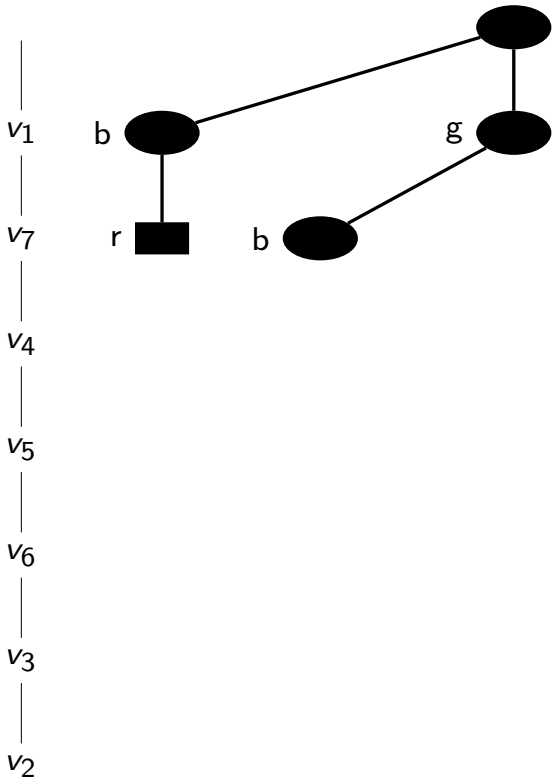


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

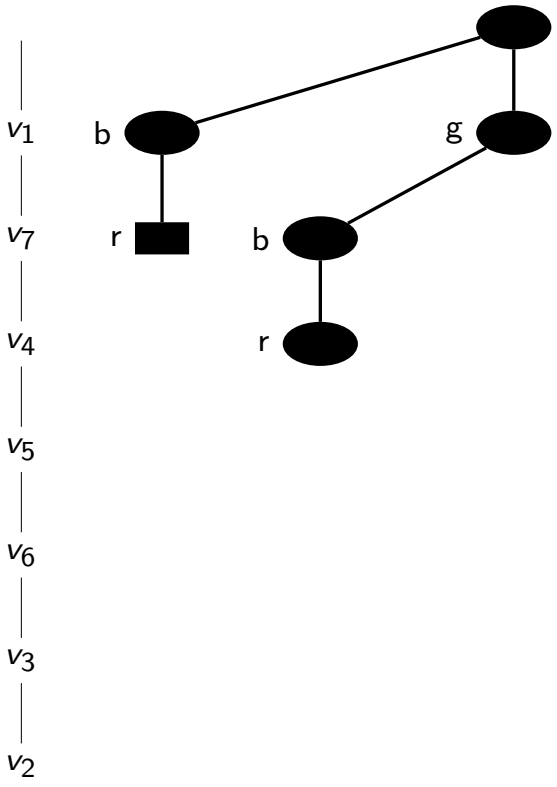


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

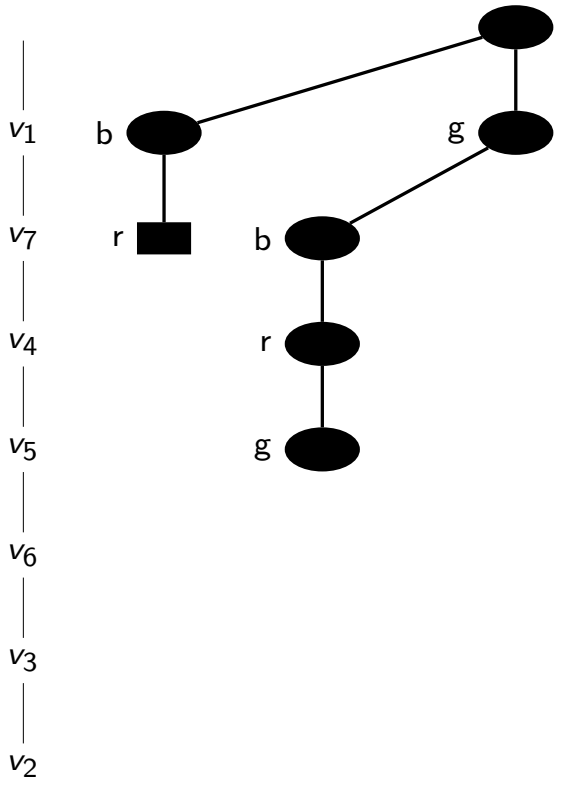


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

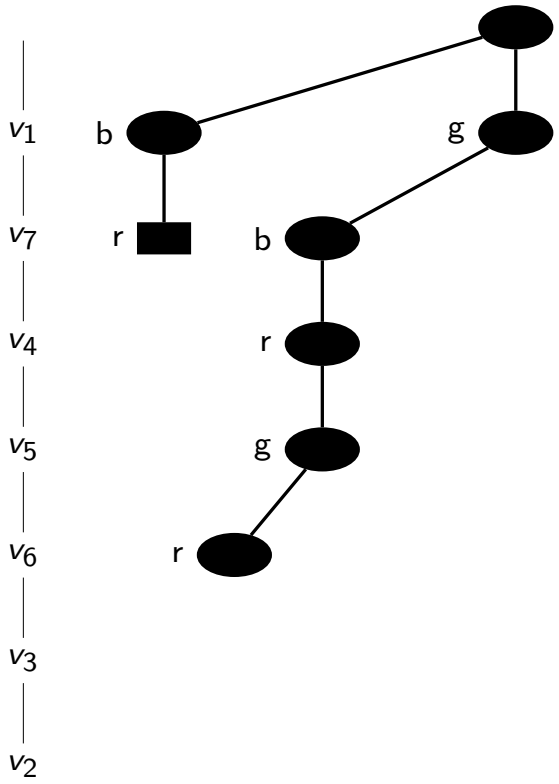


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

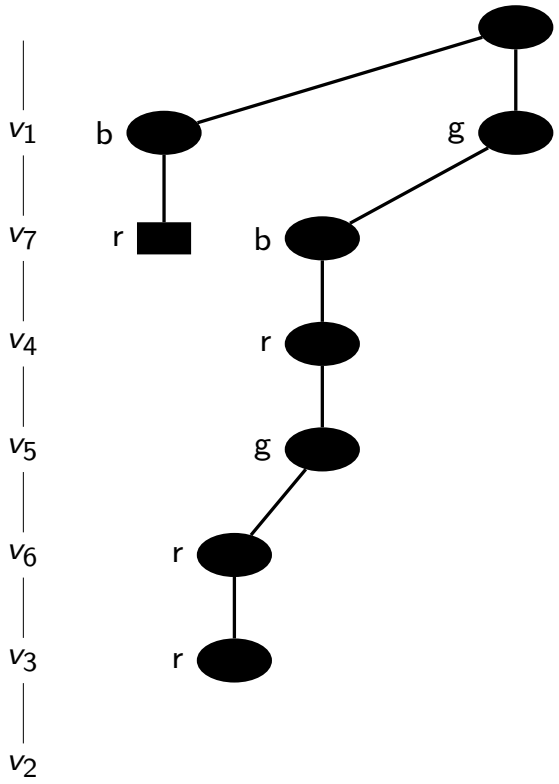


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

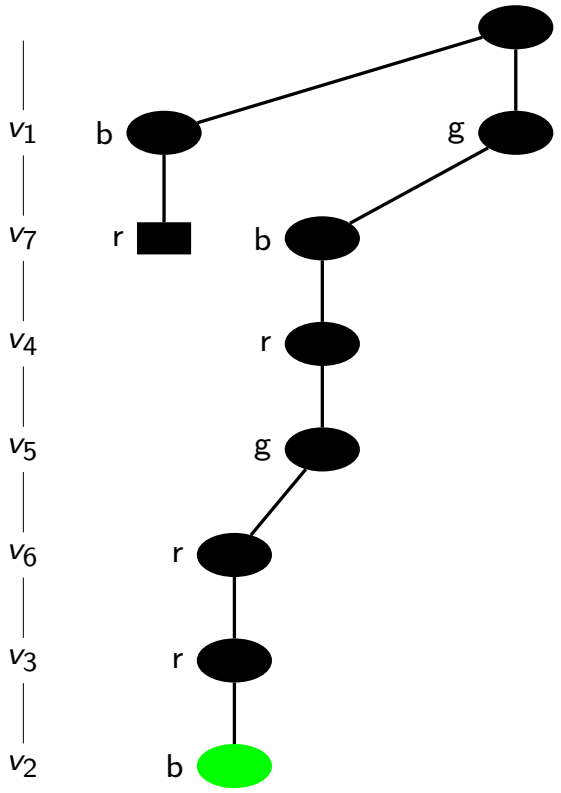


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

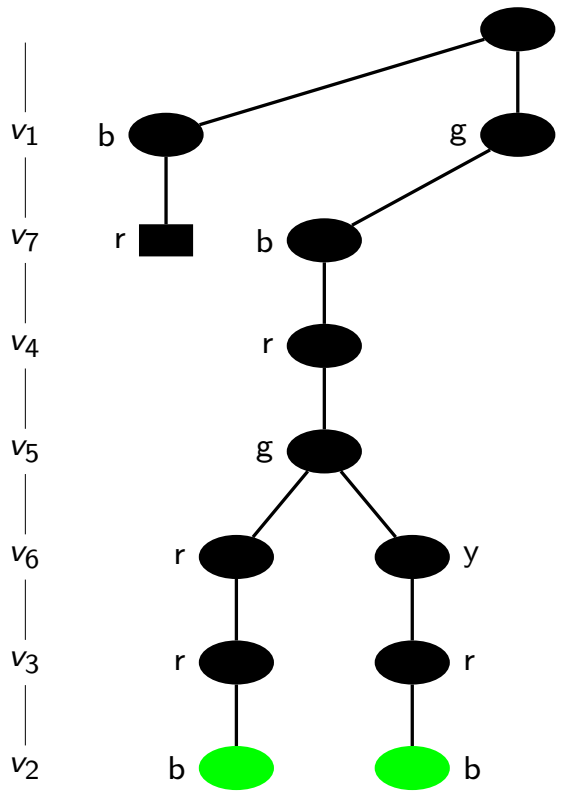


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

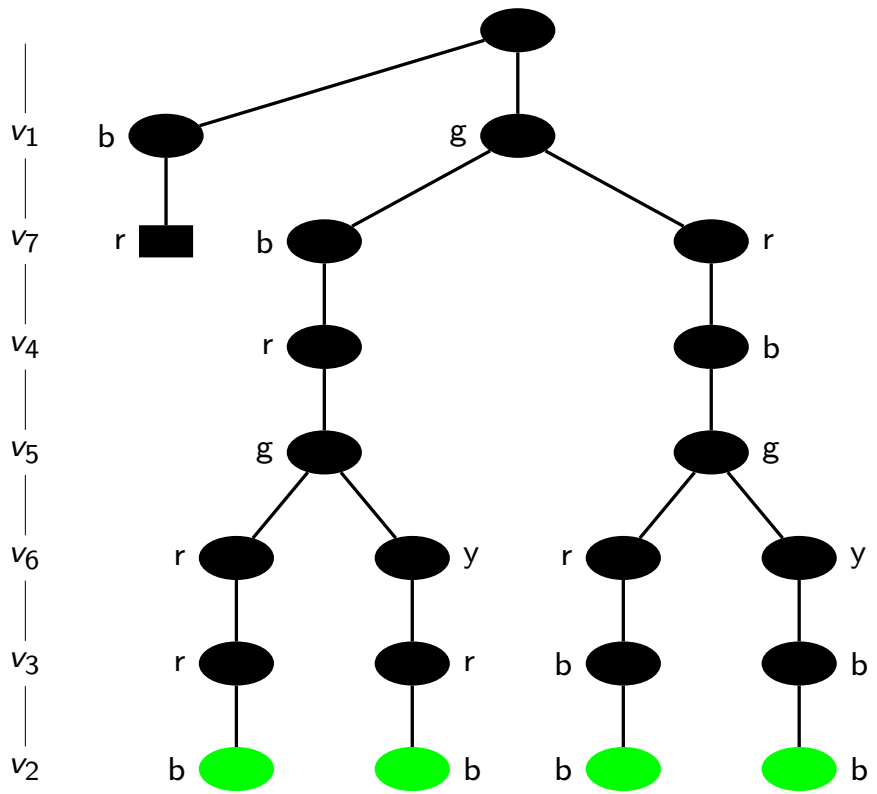


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)

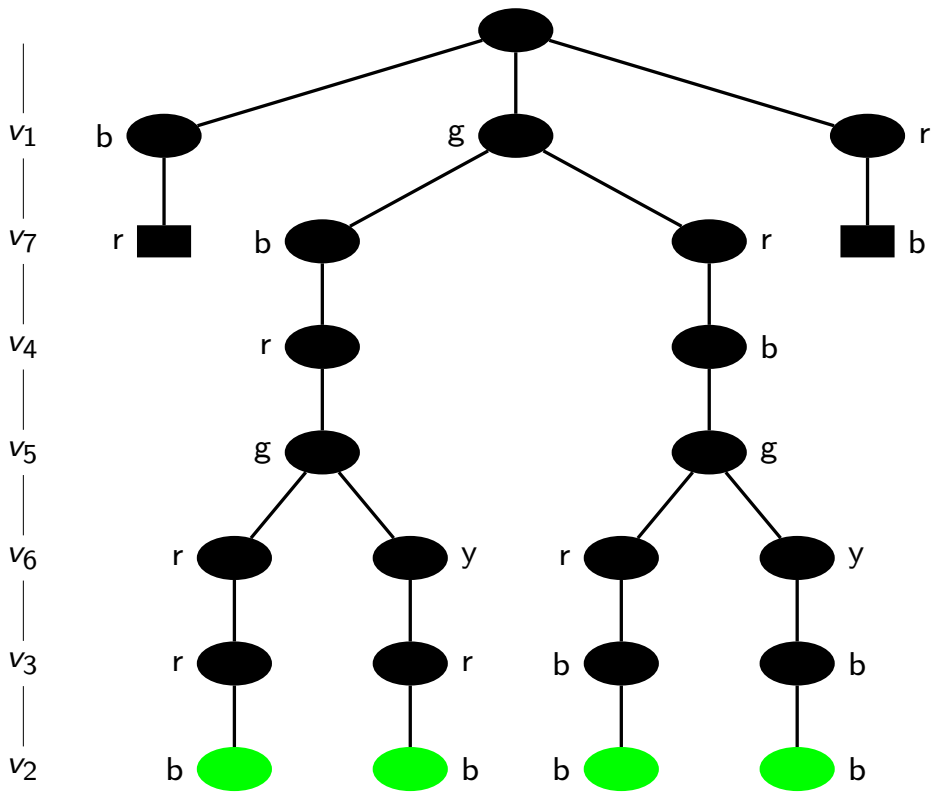


Naives Backtracking: Beispiel

Suchbaum für naives Backtracking mit

- fester Variablenreihenfolge $v_1, v_7, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2$
- alphabetischer Reihenfolge der Werte

(ohne inkonsistente Knoten; bei Zielknoten fortgesetzt)



Naives Backtracking: Diskussion

- Naives Backtracking muss oft ähnliche Suchpfade (partielle Belegungen gleich bis auf wenige Variablen) erschöpfend durchsuchen.
- „Kritische“ Variablen nicht erkannt, daher (zu) spät belegt
- Entscheidungen, die später zwangsläufig zu Constraint-Verletzungen führen, werden erst erkannt, wenn alle beteiligten Variablen belegt wurden

$\rightsquigarrow$ mehr Intelligenz durch Fokus auf kritischen Entscheidungen und Inferenz von Konsequenzen der bisherigen Entscheidungen

Variablen- und Wertordnungen

Naives Backtracking

function NaiveBacktracking($\mathcal{C}, \alpha$):

$\langle V, \text{dom}, (R_{uv}) \rangle := \mathcal{C}$

if α is inconsistent with $\mathcal{C}$:
    return inconsistent

if α is a total assignment:
    return α

select some variable v for which α is not defined

for each $d \in \text{dom}(v)$ in some order:
    $\alpha' := \alpha \cup \{v \mapsto d\}$
    $\alpha'' :=$ NaiveBacktracking($\mathcal{C}, \alpha'$)
    if $\alpha'' \neq$ **inconsistent**:
        return α''
return inconsistent

Variablen- und Wertordnungen

Variablenordnung:

- Backtracking lässt offen, in welcher Reihenfolge Variablen belegt werden
- beeinflusst oft dramatisch die Grösse des Suchraums und damit die Performance der Suche
  $\rightsquigarrow$ Beispiel: Übungsaufgaben

Wertordnung:

- Backtracking lässt ebenfalls offen, in welcher Reihenfolge die Werte der ausgewählten Variable v betrachtet werden
- nicht ganz so wichtig, da in Teilbäumen ohne Lösung nicht von Belang (Warum nicht?)
- wenn Lösung im Teilbaum existiert, sollte nach Möglichkeit zunächst Wert ausgewählt werden, der zur Lösung führt (Warum?)

Statische vs. dynamische Ordnungen

Wir unterscheiden:

- statische Ordnungen (im Voraus festgelegt)
- dynamische Ordnungen (ausgewählte Variable/ ausgewählte Wertordnung hängt vom Suchzustand ab)

Vergleich:

- dynamische Ordnungen offensichtlich mächtiger
- statische Ordnungen verursachen dafür keinen Overhead während der Suche

Die folgenden Ordnungen können statisch vorgenommen werden, sind aber effektiver, wenn man sie mit Inferenz ($\rightsquigarrow$ später) kombiniert und dynamisch auswertet.

Variablenordnungen

Zwei häufige Kriterien zur Variablenordnung:

- Minimum Remaining Values: wähle zuerst Variablen aus, deren Wertebereich möglichst klein ist
  - Intuition: wenige Teilbäume $\rightsquigarrow$ kleiner Baum
  - Extremfall: nur ein Wert $\rightsquigarrow$ erzwungene Belegung
- Most Constraining Variable: wähle zuerst Variablen aus, die an möglichst vielen nichttrivialen Constraints beteiligt sind
  - Intuition: Constraints möglichst früh testen $\rightsquigarrow$ früh Inkonsistenzen erkennen $\rightsquigarrow$ kleiner Baum

Kombination: verwende Minimum-Remaining-Values-Kriterium, dann Most-Constraining-Variable-Kriterium zum Tie-Breaking

Wertordnungen

Definition (Konflikt)

Sei $\mathcal{C} = \langle V, \mathrm{dom}, (R_{uv}) \rangle$ ein Constraint-Netz.
Für Variablen $v \neq v'$ und Werte $d \in \mathrm{dom}(v)$, $d' \in \mathrm{dom}(v')$ steht $v \mapsto d$ im Konflikt mit $v' \mapsto d'$, falls $\langle d, d' \rangle \notin R_{vv'}$.

Kriterium zur Wertordnung für partielle Belegung α und ausgewählte Variable v:

- Minimum Conflicts: Bevorzuge Werte $d \in \mathrm{dom}(v)$, für die $v \mapsto d$ an möglichst wenigen Konflikten mit in α unbelegten Variablen beteiligt ist.

Zusammenfassung

Zusammenfassung: Backtracking

grundlegender Suchalgorithmus für Constraint-Netze: Backtracking

- erweitere (anfänglich leere) partielle Belegung schrittweise, bis Inkonsistenz oder Lösung gefunden
- ist eine Form der Tiefensuche
- Tiefensuche hier besonders geeignet, da der Zustandsraum ein gerichteter Baum ist und alle Lösungen in derselben, a priori bekannten Tiefe liegen

Zusammenfassung: Variablen- und Wertordnungen

- Variablenordnungen beeinflussen die Performanz von Backtracking massgeblich
  - Ziel: kritische Entscheidungen möglichst früh
- Wertordnungen beeinflussen die Performanz von Backtracking auf lösbaren Constraint-Netzen massgeblich
  - Ziel: viel versprechende Belegungen zuerst