

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

19. Constraint-Satisfaction-Probleme: Einführung und Beispiele

Malte Helmert

Universität Basel

7. April 2014

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

7. April 2014 — 19. Constraint-Satisfaction-Probleme: Einführung und Beispiele

19.1 Einführung

19.2 Beispiele

19.3 Zusammenfassung

Einordnung

Einordnung:

Constraint-Satisfaction-Probleme

Umgebung:

- ▶ **statisch** vs. dynamisch
- ▶ **deterministisch** vs. nicht-deterministisch vs. stochastisch
- ▶ **vollständig** vs. partiell vs. nicht **beobachtbar**
- ▶ **diskret** vs. stetig
- ▶ **ein Agent** vs. mehrere Agenten

Lösungsansatz:

- ▶ problemspezifisch vs. **allgemein** vs. lernend

Constraint-Satisfaction-Probleme: Überblick

Kapitelüberblick Constraint-Satisfaction-Probleme:

- ▶ 19.–20. Einführung
 - ▶ **19. Einführung und Beispiele**
 - ▶ 20. Constraint-Netze
- ▶ 21.–23. Kernalgorithmen
- ▶ 24.–25. Problemstruktur

19.1 Einführung

Constraints

Was ist ein Constraint?

constraint = Einschränkung, Nebenbedingung (math.)

Bedingung, die jede Lösung eines Problems erfüllen muss

Verwendung:

- ▶ **Mathematik**: Anforderung an die Lösung eines Optimierungsproblems (z. B. Gleichung, Ungleichung)
- ▶ **Software-Testing**: Spezifikation von Invarianten für Überprüfung von Datenkonsistenz (z. B. Assertions)
- ▶ **Datenbanken**: für Integritätsbedingungen (z.B. **foreign key**)

Constraint-Satisfaction-Probleme informell

Gegeben:

- ▶ eine Menge von **Variablen** mit einem bestimmten Wertebereich
- ▶ eine Menge von **Constraints** (Bedingungen), die diese Variablen erfüllen müssen
 - ▶ meist **binär**, d. h. jede Bedingung spricht über **zwei** Variablen

Gesucht:

- ▶ eine **Belegung** der Variablen, die alle Constraints erfüllt

19.2 Beispiele

Beispiele

Beispiele für Constraint-Satisfaction-Probleme

- ▶ lateinische Quadrate
- ▶ Sudoku
- ▶ 8-Damen-Problem
- ▶ Graphfärbung
- ▶ Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Komplexere Beispiele:

- ▶ Datenbankabfragen
- ▶ Gleichungs- und Ungleichungssysteme

Beispiel: lateinische Quadrate

lateinische Quadrate

Wie kann man

- ▶ eine $n \times n$ -Matrix mit n Symbolen bilden,
- ▶ so dass jedes Symbol genau einmal in jeder Zeile und Spalte auftritt?

$$[1] \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Es gibt 12 verschiedene lateinische Quadrate der Grösse 3, 576 der Grösse 4, 161'280 der Grösse 5, ..., 5'524'751'496'156'892'842'531'225'600 der Grösse 9.

Beispiel: Sudoku

Sudoku

Wie kann man

- ▶ eine partiell gefüllte 9×9 -Matrix mit den Zahlen 1–9 füllen,
- ▶ so dass jede Zeile, jede Spalte und jeder der neun 3×3 -Blöcke jede Zahl genau einmal enthält?

2	5			3		9		1
	1				4			
4		7				2		8
		5	2					
				9	8	1		
	4				3			
			3	6			7	2
	7							3
9		3				6		4

Zusammenhang lateinische Quadrate?

Sudoku: Trivia

- ▶ wohlgeformte Sudokus haben genau eine Lösung
- ▶ dafür müssen im Minimalfall 17 Felder vorausgefüllt werden (McGuire et al., 2012)
- ▶ 6'670'903'752'021'072'936'960 gelöste Konfigurationen
- ▶ nur 5'472'730'538 unter Ausnutzung von Symmetrie

Beispiel: 8-Damen-Problem

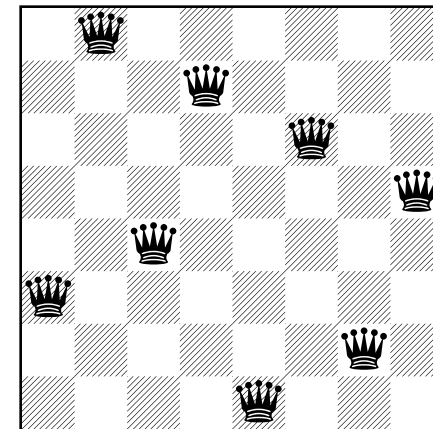
8-Damen-Problem

Wie kann man

- ▶ 8 Damen auf einem Schachbrett platzieren,
- ▶ so dass sich keine zwei Damen bedrohen?
- ▶ ursprünglich 1848 vorgestellt
- ▶ Varianten: Brettgrösse; andere Figuren; mehr Dimensionen

Das Problem hat 12 Lösungen, wenn man symmetrische Lösungen (Rotationen, Spiegelungen) nur einmal zählt

8-Damen-Problem: eine Lösung



eine Lösung des 8-Damen-Problems

Beispiel: Graphfärbung

Graphfärbung

Wie kann man

- ▶ die Knoten eines gegebenen Graphen mit k Farben
- ▶ so einfärben, dass zwei benachbarte Knoten nie dieselbe Farbe haben?

(Der Graph und k sind Parameter des Problems.)

NP-vollständiges Problem

- ▶ selbst für den Spezialfall planarer Graphen und $k = 3$
- ▶ einfach für $k = 2$ (auch für allgemeine Graphen)

Zusammenhang Sudoku?

Vier-Farben-Problem

berühmtes mathematisches Problem: Vier-Farben-Problem

- ▶ kann man planare Graphen immer mit 4 Farben einfärben?
- ▶ Vermutung aufgestellt von Francis Guthrie (1852)
- ▶ 1890 erster Beweis, dass 5 Farben ausreichen
- ▶ mehrmals falsche Beweise, die über 10 Jahre Bestand hatten
- ▶ gelöst 1976 durch Appel und Haken: 4 Farben reichen
- ▶ Appel und Haken reduzierten Problem auf 1936 Fälle, die durch Computer überprüft wurden
- ▶ erstes grosses offenes Problem in der Mathematik, das per Computer gelöst wurde
- ↪ führte zu Kontroverse: Ist das ein Beweis?

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Wie kann man

- ▶ eine gegebene Menge von **Aussagevariablen** so mit **wahr/falsch** belegen,
- ▶ dass eine gegebene Menge von **Klauseln** (Formeln der Art $X \vee \neg Y \vee Z$) erfüllt (wahr) wird?

Anmerkungen:

- ▶ NP-vollständig (Cook 1971; Levin 1973)
- ▶ Klauselform (statt beliebiger Logikformeln) ist keine echte Einschränkung
- ▶ Beschränkung auf Klauseln der Länge 3 wäre ebenfalls keine echte Einschränkung

Zusammenhang zu vorigen Problemen (z.B. Sudoku)?

Praktische Anwendungen

- ▶ Es gibt **Tausende** praktischer Anwendungen von Constraint-Satisfaction-Problemen.
- ▶ Dies gilt allein schon für das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik.

Einige Beispiele:

- ▶ Verifikation digitaler Schaltkreise
- ▶ Timetabling (Erstellen von Zeit- und Belegungsplänen)
- ▶ Planung von Wasser- und Elektrizitätsleitungen, Strassen und ähnlicher Infrastruktur
- ▶ Zuweisung von Frequenzspektren (Rundfunk, Mobilfunk)
- ▶ Konfiguration von elektronischen Geräten (z. B. Drucker)

19.3 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ **Constraint Satisfaction:**
 - ▶ finde **Belegung** einer Menge von **Variablen**
 - ▶ mit bestimmten **Wertebereichen**,
 - ▶ die einer Menge von **Constraints** (Bedingungen) genügt.
- ▶ **Beispiele:**
 - ▶ lateinische Quadrate
 - ▶ Sudoku
 - ▶ 8-Damen-Problem
 - ▶ Graphfärbung
 - ▶ Erfüllbarkeit in Aussagenlogik
 - ▶ Tausende praktische Anwendungen