Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

16. Klassische Suche: A*: Optimalität, Teil II

Malte Helmert

Universität Basel

4. April 2014

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

4. April 2014 — 16. Klassische Suche: A*: Optimalität, Teil II

Klassische Suche: Überblick

Kapitelüberblick klassische Suche:

- 3.–5. Einführung
- 6.–9. Basisalgorithmen
- 10.-17. heuristische Algorithmen
  - 10. Heuristiken
  - 11. Analyse von Heuristiken
  - 12. Bestensuche als Graphensuche
  - 13. Gierige Bestensuche, A*, Weighted A*
  - 14. IDA*
  - 15. A*: Optimalität, Teil I
  - 16. A*: Optimalität, Teil II
  - 17. A*: Vollständigkeit und Komplexität

16.1 Optimalität von A* ohne Reopening

Optimalität von A* ohne Reopening (1)

Satz (Optimalität von A* ohne Reopening)

A ohne Reopening ist optimal, wenn die verwendete Heuristik konsistent und zielerkennend ist.*

Beweis.

Wir verändern (als Gedankenexperiment) A* so,
dass es die Suche fortsetzt, wenn ein Zielzustand expandiert wird.

$\rightsquigarrow$ expandiert weiter, bis *open* leer ist

$\rightsquigarrow$ alle erreichbaren Zustände werden erreicht
(ausser solchen "hinter" Zuständen mit $h(s) = \infty$,
und hinter diesen können keine Lösungen liegen) ...

Optimalität von A* ohne Reopening (2)

Beweis (Fortsetzung).

Sei n der erste expandierte Zielknoten, s sein (Ziel-) Zustand.

- Optimale-Pfade-Lemma: $f(n) = f_h^*(s) = g^*(s) + h(s)$
- h ist zielerkennend: $h(s) = 0$
- zusammen: $f(n) = g^*(s)$

Sei n' ein später expandierter Zielknoten mit Zielzustand s'.

- analog: $f(n') = g^*(s')$
- Monotonielemma (Teil 3): $f(n) \leq f(n')$
- zusammen: $g^*(s) \leq g^*(s')$

Wir sehen, dass optimale Pfadkosten für später erreichte Zielzustände mindestens so hoch wie für s sind.

$\rightsquigarrow$ erste gefundene Lösung ist optimal

$\rightsquigarrow$ Fortsetzung der Suche an dieser Stelle ist unnötig □

Diskussion: warum Konsistenz?

- Wir haben Konsistenz und Zielerkennung gefordert.
- Wir wissen: aus diesen Eigenschaften folgt Zulässigkeit.
- Reicht Zulässigkeit allein aus, damit A* optimal ist?
- Im allgemeinen ohne Reopening nein:
  zulässige, aber inkonsistente Heuristiken können
  das Optimale-Pfade-Lemma verletzen,
  und das kann zu suboptimalen Lösungen führen.
- Abhilfe: Reopening

16.2 Optimalität von A* mit Reopening

Optimalität von A* mit Reopening (1)

Satz (Optimalität von A* mit Reopening)

A mit Reopening ist optimal, wenn die verwendete Heuristik zulässig ist.*

- Wir skizzieren nur den Beweis.
- Ein vollständig formaler Beweis würde etwas mehr Arbeit erfordern, aber nicht mehr als die Beweise für A* ohne Reopening.

Optimalität von A* mit Reopening (2)

Beweisskizze.

- Seien c^* die optimalen Lösungskosten.
  Bezeichne S^* die Menge aller Zustände, die Teil optimaler Lösungen sind.
  Seien $\tilde{S}$ die Zustände mit $f_h^*(s) \leq c^*$.
- Wegen Zulässigkeit: $S^* \subseteq \tilde{S}$.
- Wir zeigen: Zustände $s \notin \tilde{S}$ können erst expandiert werden, nachdem alle Zustände in S^* expandiert wurden.
- Dabei werden (evtl. über Reopening) alle Transitionen innerhalb S^* berücksichtigt und somit alle Pfade gefunden, die ausschliesslich aus Zuständen in S^* bestehen.

Optimalität von A* mit Reopening (3)

Beweisskizze (Fortsetzung).

- Optimale Lösungen sind solche Pfade.
- Daher finden wir eine Lösung, bevor wir $\tilde{S}$ verlassen, und es folgt, dass $\tilde{S}$ nie verlassen wird.
- Es folgt $f_h^*(n) \leq c^*$ für den gefundenen Lösungsknoten.

$\rightsquigarrow$ Optimalität

□

16.3 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- A* ohne Reopening ist optimal, wenn die verwendete Heuristik konsistent und zielerkennend ist.
- A* mit Reopening ist optimal, wenn die verwendete Heuristik zulässig ist.