Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

15. Klassische Suche: A*: Optimalität, Teil I

Malte Helmert

Universität Basel

4. April 2014

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

4. April 2014 — 15. Klassische Suche: A*: Optimalität, Teil I

Klassische Suche: Überblick

Kapitelüberblick klassische Suche:

- 3.–5. Einführung
- 6.–9. Basisalgorithmen
- 10.-17. heuristische Algorithmen
  - 10. Heuristiken
  - 11. Analyse von Heuristiken
  - 12. Bestensuche als Graphensuche
  - 13. Gierige Bestensuche, A*, Weighted A*
  - 14. IDA*
  - 15. A*: Optimalität, Teil I
  - 16. A*: Optimalität, Teil II
  - 17. A*: Vollständigkeit und Komplexität

15.1 Einführung

Optimalität von A*

- Vorteil von A* gegenüber gieriger Suche:
  optimal für Heuristiken mit geeigneten Eigenschaften
- sehr wichtiges Ergebnis!

⇝ die nächsten Kapitel: ein genauerer Blick auf A*

In diesem Kapitel beweisen wir zunächst zwei wichtige Lemmas.

15.2 Monotonielemma

A*: Monotonielemma (1)

Lemma (Monotonie von A* mit konsistenten Heuristiken)

Betrachte A mit einer konsistenten Heuristik.*

Dann gilt:

1. *Wenn n' ein Kindknoten von n ist, gilt $f(n') \geq f(n)$.*
2. *Auf allen von A* erzeugten Pfaden steigen die f-Werte monoton.*
3. *Die Folge der f-Werte der von A* expandierten Knoten steigt monoton.*

A*: Monotonielemma (2)

Beweis.

zu 1.:
Sei n' ein Kindknoten von n über Aktion a.
Sei $s = n.\text{state}$, $s' = n'.\text{state}$.

- Definition von f: $f(n) = g(n) + h(s)$, $f(n') = g(n') + h(s')$
- Definition von g: $g(n') = g(n) + cost(a)$
- Konsistenz von h: $h(s) \leq cost(a) + h(s')$

⇝ $f(n) = g(n) + h(s) \leq g(n) + cost(a) + h(s')$
$= g(n') + h(s') = f(n')$

zu 2.: folgt direkt aus 1.

...

A*: Monotonielemma (3)

Beweis (Fortsetzung).

zu 3.:

- Sei f_b der minimale f-Wert in *open* am Anfang einer Schleifeniteration in A*.
  Sei n der entfernte Knoten mit $f(n) = f_b$.
- zu zeigen: am Ende der Iteration ist der minimale f-Wert in *open* mindestens f_b.
- Wir müssen die Operationen betrachten, die *open* modifizieren: *open*.pop_min und *open*.insert.
- *open*.pop_min kann den minimalen f-Wert in *open* nicht verringern (nur erhöhen).
- Die mit *open*.insert hinzugefügten Knoten n' sind Kinder von n und erfüllen daher $f(n') \geq f(n) = f_b$ nach Teil 1.

$\square$

15.3 Optimale-Pfade-Lemma

Optimale Pfade

Zwei weitere Notationen im Zusammenhang mit optimalen Pfaden vom Anfangszustand s_0 zu Zuständen s:

- $g^*(s)$: Kosten eines optimalen Pfades von s_0 zu s
- $f^*_h(s) = g^*(s) + h(s)$

Anmerkungen:

- f^*_h und g^* für Zustände, nicht Knoten definiert, anders als f und g (Warum?)
- $f^*_h(n.\text{state}) \leq f(n)$ für alle Knoten n, die ein Suchalgorithmus erzeugen kann (Warum?)

A*: Optimale-Pfade-Lemma (1)

Lemma (Optimale Pfade für A* mit konsistenter Heuristik)

Sei n ein Knoten, der von A mit einer konsistenten Heuristik expandiert wird, und sei $s = n.\text{state}$.*

Dann gilt:

1. $g(n) = g^*(s)$
2. $f(n) = f^*_h(s)$

In Worten: Wenn A* mit konsistenter Heuristik n expandiert, wurde ein optimaler Pfad von s_0 zum Zustand von n gefunden.

A*: Optimale-Pfade-Lemma (2)

Beweis.

Induktion über die Anzahl expandierter Knoten:

Induktionsanfang:

Der erste expandierte Knoten ist der Wurzelknoten n_0 für den Anfangszustand s_0.

Es gilt: $g(n_0) = 0 = g^*(s_0)$ und $f(n_0) = 0 + h(s_0) = f_h^*(s_0)$

Induktionsschritt:

zu 2.:

Betrachte Situation, unmittelbar bevor n von *open* entfernt wird.
Sei $s = n$.state.
Wir können annehmen, dass n kein Duplikat ist ($s \notin$ *closed*), denn sonst wird n nicht expandiert.

- Sei $s_0, s_1, \ldots, s_k$ mit $s_k = s$ ein optimaler Pfad von s_0 zu s.
- Sei j der grösste Index mit $s_j \in$ *closed* und $s_{j+1} \notin$ *closed*. ...

A*: Optimale-Pfade-Lemma (3)

Beweis (Fortsetzung).

- So ein Index j existiert immer, da
  - $s_0 \in$ *closed* (Wurzelknoten schon expandiert)
  - $s_k \notin$ *closed* (sonst n Duplikat)
- Da $s_j \in$ *closed* wurde ein Knoten n_j mit n_j.state $= s_j$ expandiert.
- Nach Induktionsvoraussetzung gilt $g(n_j) = g^*(s_j)$.
- Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Zustände $s_0, \ldots, s_j$ so gewählt wurden, dass sie den Pfad zu n_j bilden. Dies beeinflusst nicht die Optimalität des Pfades $s_0, \ldots, s_k$.
- Seien $n_0, \ldots, n_k$ die Knoten, die zu $\langle s_0, \ldots, s_k \rangle$ gehören. (Es ist nicht nötig, dass diese von A* erzeugt wurden.) ...

A*: Optimale-Pfade-Lemma (4)

Beweis (Fortsetzung).

- Aus $s_j \in$ *closed* und $s_{j+1} \notin$ *closed* erhalten wir $n_{j+1} \in$ *open*:
  - Bei der Expansion von n_j wurde n_{j+1} in *open* eingefügt.
  - Wenn n_{j+1} aus *open* entnommen worden wäre, hätten wir $s_{j+1} \in$ *closed*. (Widerspruch!)
- Also sind unmittelbar vor der Expansion von n sowohl n_{j+1} als auch n in *open*, und n wird ausgewählt. Daraus folgt $f(n) \leq f(n_{j+1})$.
- Wegen der Monotonie von f auf Pfaden: $f(n_{j+1}) \leq f(n_{j+2}) \leq \cdots \leq f(n_k)$
- Wegen der Optimalität des Pfades $s_0, \ldots, s_k$: $f(n_k) = g(n_k) + h(s_k) = g^*(s_k) + h(s_k) = f_h^*(s_k) = f_h^*(s)$
- Zusammen: $f(n) \leq f_h^*(s)$ und daher $f(n) = f_h^*(s)$ (sonst Widerspruch zur Definition von f_h^*) ...

A*: Optimale-Pfade-Lemma (5)

Beweis (Fortsetzung).

zu 1.:

- aus 2.: $f(n) = f_h^*(s)$
- Definition: $g(n) + h(s) = g^*(s) + h(s)$
- Subtraktion von $h(s)$: $g(n) = g^*(s)$

Im letzten Schritt verwenden wird, dass $h(s)$ endlich sein muss, falls n expandiert wird. □

Zwischenbemerkung: Optimalität von A*?

- Das Ziel unserer Analyse ist, die Optimalität von A* unter geeigneten Voraussetzungen nachzuweisen.
- Reichen unsere bisherigen Ergebnisse hierfür aus?
- Fast! Das Optimale-Pfade-Lemma garantiert: Wenn A* einen Zielknoten aus *open* entnimmt, wurde ein optimaler Pfad zum zugehörigen Zielzustand gefunden.
- Aber vielleicht gibt es billigere Pfade zu anderen Zielzuständen?
- Ohne weitere Forderungen an die Heuristik ist dies tatsächlich möglich! (Konsistenz alleine reicht nicht.)

15.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

Beginn Optimalitätsbeweis von A*:

- Monotonie-Lemma für A* mit konsistenter Heuristik:
  - f-Werte steigen monoton von Knoten zu Kindknoten
  - f-Werte steigen monoton auf Pfaden
  - f-Werte der expandierten Knoten steigen monoton
- Optimale-Pfade-Lemma für A* mit konsistenter Heuristik: Wenn n expandiert wird, wurde ein optimaler Pfad von der Wurzel zum Zustand von n gefunden.