

“Theorie der Informatik” (CS206)

Aussagenlogik (Fortsetzung), Prädikatenlogik

6. März 2013

Proff Malte Helmert und Christian Tschudin

Departement Mathematik und Informatik, Universität Basel

Einstiegsfragen

1. Wie sieht eine aussagelogische Formel aus?
2. Was ist eine “Interpretation”?
3. Was heisst “eine Formel erfüllen”?
4. Was sind “gültige” Formeln?
5. Was ist eine Wahrheitstabelle?
6. Zu welcher aussagenlogischen Formel ist XOR äquivalent?
7. Wie lautet die “De Morgan”-Aequivalenz?
8. Was ist eine “konjunktive Normalform”?

Logische Implikation

Eine Menge von Formeln (Wissensbasis WB) stellt meistens eine **unvollständige** Beschreibung der Welt dar, d.h. lässt den Wahrheitswert einiger Aussagen offen.

Beispiel: Die Wissensbasis $WB = \{p \vee q, r \vee \neg p, s\}$ ist bezüglich s definiert, lässt aber den Wert von p , q , und r offen, zumindest teilweise(!)

Modelle für die obige WB:	p	q	r	s
	F	T	F	T
	F	T	F	T
	T	F	T	T
	T	T	T	T

In allen Modellen ist $q \vee r$ wahr. Deshalb ist “ $q \vee r$ ” **logisch** durch WB **impliziert**, man sagt auch: ist **logische Konsequenz** von WB, symbolisch somit “ $WB \models q \vee r$ ”.

Logische Implikation: formal

Definition:

Sei WB eine Menge von aussagelogischen Formeln und φ auch eine aussagelogische Formel.

Dann sagen wir “**WB impliziert** φ ”

(“ φ **folgt logisch aus** WB”, “ φ ist **logische Konsequenz** von WB”, in Symbolen geschrieben als: $WB \models \varphi$)

falls alle Modelle von WB auch Modelle von φ sind.

Einige Eigenschaften der logischen Implikation

- **Deduktionstheorem:**

$$WB \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ gdw } WB \models \varphi \rightarrow \psi$$

- **Kontrapositionstheorem:**

$$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \text{ gdw } WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$$

- **Widerspruchstheorem:**

$$WB \cup \{\varphi\} \text{ ist unerfüllbar gdw } WB \models \neg\varphi$$

Beweis des Deduktionstheorems

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ gdw } WB \models \varphi \rightarrow \psi$

Beweis “ $\Rightarrow$ ”: Gegeben ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models \varphi \rightarrow \psi$, d.h. alle Modelle von WB erfüllen $\varphi \rightarrow \psi$. Sei I (irgend) eines dieser Modelle. Zwei Fälle:

- **Fall 1:** $I \models \varphi$.

Dann ist I ein Modell von $WB \cup \{\varphi\}$. Zudem gilt $I \models \psi$ wegen der Annahme für diesen Beweis, voraus folgt dass $I \models \varphi \rightarrow \psi$.

- **Fall 2:** $I \not\models \varphi$.

Dann können wir direkt schliessen dass $I \models \varphi \rightarrow \psi$.

... andere Beweisrichtung siehe nächste Seite

Beweis des Deduktionstheorems (Forts)

Beweis “ $\Leftarrow$ ”:

Vorausgesetzt/gegeben ist, dass $WB \models \varphi \rightarrow \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h. alle Modelle von $WB \cup \{\varphi\}$ erfüllen ψ . Betrachte solch ein Modell I .

$I \models \varphi$ gemäss Definition. Zudem, weil I ein Modell von WB ist, haben wir $I \models \varphi \rightarrow \psi$ wegen der Voraussetzung.

Zusammengenommen erhalten wir $I \models \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$, durch Aequivalenzumformung $I \models \varphi \wedge \psi$, woraus folgt dass $I \models \psi$.

Beweis des Kontrapositionstheorems

$$\boxed{WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \text{ gdw } WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi}$$

Wegen Deduktionstheorem gilt $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw $WB \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.

Ebenso aus gleichem Grund: $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw $WB \models \psi \rightarrow \neg\varphi$.

Zudem $\varphi \rightarrow \neg\psi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi \equiv \psi \rightarrow \neg\varphi$.

Zusammengesetzt erhalten wir die gewünschte Aussage:

$$\begin{aligned} &WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \\ \text{gdw } &WB \models \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \text{gdw } &WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi \end{aligned}$$

Frage:

Kann bestimmt werden ob $WB \models \varphi$ gilt

ohne alle Interpretationen untersuchen zu müssen?

(Wahrheitstabellen-Methode)

- Antwort: **Ja!** Es gibt mehrere Möglichkeiten dazu.
- Im folgenden betrachten wir Schlussregeln (**Inferenzregeln**), (Ableitungsregeln) die aussagelogische Formeln aus einer gegebenen Menge von aussagelogischen Formeln produzieren.
- Ein Satz von Inferenzregeln wird auch **Kalkül** oder **Beweissystem** genannt.

Inferenzregel, Axiom

Inferenzregeln werden in folgender Form dargestellt:

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}$$

was bedeutet, dass “falls $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ wahr ist, dann ist ψ auch wahr.”

Der Fall $k = 0$ ist erlaubt.

Solche Inferenzregeln werden **Axiome** genannt.

Wichtige aussagelogische Inferenzregeln

Modus ponens	$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
Modus tolens	$\frac{\neg\psi, \varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi}$
Und-Elimination	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
Und-Einführung	$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
Oder-Einführung	$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$
($\perp$) Elimination	$\frac{\perp}{\varphi}$
($\leftrightarrow$) Elimination	$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \varphi}$

Ableitung

Definition:

Eine **Ableitung** (oder “**Beweis**”) einer Formel φ aus einer Wissensbasis WB ist eine Sequenz von Formeln $\psi_1, \dots, \psi_k$ so dass

- $\psi_k = \varphi$ und
- für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt:
 - $\psi_i \in \text{WB}$, oder
 - ψ_i ist das Resultat der Anwendung einer Inferenzregeln auf ausgewählten Elemente aus $\{\psi_1, \dots, \psi_{i-1}\}$.

Notation: $\text{WB} \vdash \varphi$ heisst “ φ kann aus WB abgeleitet werden”

Beispiel einer Ableitung

Sei $WB = \{p, p \rightarrow q, p \rightarrow r, q \wedge r \rightarrow s\}$.

Ableitung von $s \wedge r$ aus WB?

1. p (WB)
2. $p \rightarrow q$ (WB)
3. q (1, 2, modus ponens)
4. $p \rightarrow r$ (WB)
5. r (1, 4, modus ponens)
6. $q \wedge r$ (3, 5, Und-Einführung)
7. $q \wedge r \rightarrow s$ (WB)
8. s (6, 7, modus ponens)
9. $s \wedge r$ (8, 5, Und-Einführung)

Zusammenfassung Aussagenlogik

- **Logiken** sind mathematische Ansätze, um das Schlussfolgern zu formalisieren.
- Die **Aussagenlogik** handelt von Wahr/Falsch-Aussagen und ist für Informatik speziell relevant.
- Drei Komponenten finden wir bei allen Logiken:
 - **Syntax** – formalisiert wie ein (wohlgeformter) Ausdruck aussehen muss.
 $\leadsto$ Atome, Konnektoren, Formeln, ...
 - **Semantik** – formalisiert, was solche Ausdrücke bedeuten.
 $\leadsto$ Interpretation, Modell, erfüllbar, gültig (Tautologie), ...
 - **Kalkül** (Beweissystem) – liefert formale Regeln um Schlüsse aus einer Menge gegebener Formeln zu ziehen.
 $\leadsto$ Inferenzregeln, Ableitung

Prädikatenlogik – Motivation (Prädikate)

Aussagenlogik kümmert sich um Elementaraussagen.

Beispiel: “Die Sonne scheint”

Erweiterung auf andere Individuen, z.B. Sterne:

Prädikat “ $Scheint(s)$ ”, wobei s ein Platzhalter für Individuen ist.

Anwendung: $Scheint(Sirius)$

Allgemein: n-stellige Prädikate, z.B.

“Hans liebt Anna” $\rightarrow$ “Liebt(hans, anna)”

Zudem: n-stellige Funktionen, z.B.

“fakultaet(x)”, “ackermann(m, n)”

Prädikatenlogik – Motivation (Quantoren)

Ein berühmter Syllogismus (logischer Schluss):

- Alle Menschen sind sterblich.
- Sokrates ist ein Mensch.
- Also ist Sokrates sterblich.

In der Aussagenlogik kann dies nicht ausgedrückt werden:
dazu fehlen Quantoren (“für alle X gilt”) und “Individuen”

Prädikatenlogik – Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel. Dann ist

- $\forall x \in M : F$ auch eine PLF.
Diese Formel ist wahr, falls die Aussage F für alle möglichen Werte von x aus M gilt.
- $\exists x \in M : F$ auch eine PLF.
Diese Formel ist wahr, falls die Aussage F für mindestens ein x aus M gilt.

Beispiel: Jeder Mensch hat eine Mutter

$$\forall x \exists y \text{ Mutter}(y) \wedge \text{IstKindVon}(y, x)$$

Prädikatenlogik – “First order theory”

Prädikatenlogik ist eine “first order theory”:
Quantoren betreffen Individuenvariablen

“High order theories”

- können auch Prädikate enthalten, die Aussagen über Prädikate machen,
- Quantoren können sich auch auf Prädikate beziehen.

Nicht Inhalt dieser Veranstaltung.

Prädikatenlogik – Terme und Formeln, “Interpretation”

In der Aussagenlogik sagt uns eine “Interpretation”, ob eine Formel wahr oder falsch ist. In der Prädikatenlogik gibt es nun zwei Elemente auseinanderzuhalten:

- **Terme** identifizieren Objekte
 - “Sokrates”
 - “die Quadratwurzel von 5”
- **Formeln** machen Aussagen zu *Eigenschaften* der Objekte
 - “Alle Menschen sind sterblich.”
 - “Die Quadratwurzel von 5 ist grösser als 2.”

Neu: Eine **Interpretation** legt fest, welches Objekt durch einen Term bezeichnet wird und ob die Formel wahr (oder falsch) ist. *Ist das wirklich neu?*

Prädikatenlogik – Syntax (Signatur)

Eine (prädikatenlogische) **Signature** ist ein 4-Tupel $S = \langle \mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bestehend aus folgenden vier (unabhängigen) Teilen:

- $\mathcal{V}$ – endlich oder abzählbar viele **Variablensymbole**,
- $\mathcal{C}$ – endlich oder abzählbar viele **Konstantensymbole**,
- $\mathcal{F}$ – endlich oder abzählbar viele **Funktionssymbole**,
- $\mathcal{R}$ – endlich oder abzählbar viele **Prädikatensymbole** (auch Relationen genannt).

Jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ und Prädikatensymbol $R \in \mathcal{R}$ haben eine Stelligkeit (Anzahl Argumente, engl: arity) $arity(f)$, $arity(R) \in \mathbb{N}_1$.

Prädikatenlogik – Syntax (Stelligkeit)

Terminologie: Ein k -stelliges (Funktions- oder Prädikaten-) Symbol ist ein Symbol s mit $arity(s) = k$.

Auch: unär, binär, ternär
unary, binary, ternary

Signaturen: Beispiel aus der Arithmetik

$\langle \mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- $\mathcal{C} = \{\text{null}, \text{eins}\}$
- $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$
- $\mathcal{R} = \{\text{Positiv}, \text{Quadratzahl}\}$

$arity(\text{summe}) = arity(\text{produkt}) = 2$,
 $arity(\text{Positiv}) = arity(\text{Quadratzahl}) = 1$

Signaturen: Beispiel aus Verwandtschaftssystemen

$\langle \mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- $\mathcal{C} = \{\text{königin-elisabeth}, \text{donald-duck}\}$
- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{R} = \{\text{Weiblich}, \text{Männlich}, \text{Eltern}\}$

$\text{arity}(\text{Weiblich}) = \text{arity}(\text{Männlich}) = 1, \text{arity}(\text{Eltern}) = 2$

Konventionen:

- Variablensymbole sind *kursiv* gesetzt
- Prädikatensymbole (Relationen) beginnen mit einem Grossbuchstaben

Prädikatenlogik – Terme

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ eine Signatur.

Ein **Term** (über $\mathcal{S}$) ist induktiv gemäss folgenden Regeln aufgebaut:

- Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ist ein Term.
- Falls $t_1, \dots, t_k$ Terme sind und $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol mit Stelligkeit k , dann ist $f(t_1, \dots, t_k)$ auch ein Term.

Beispiele:

- x_4 , donald-duck, $\text{summe}(x_3, \text{produkt}(\text{eins}, x_5))$

Prädikatenlogik – Formeln (erster Teil)

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ eine Signatur.

Eine **Formel** (über $\mathcal{S}$) ist induktiv gemäss folgenden Regeln aufgebaut:

- $R(t_1, \dots, t_k)$ (**atomare Formel; Atom**)
wobei $R \in \mathcal{R}$ eine k -stellige Relation ist
und $t_1, \dots, t_k$ Terme (über $\mathcal{S}$) sind
- $t_1 = t_2$ (**Gleichheit**; auch eine atomare Formel)
wobei t_1 und t_2 Terme (über $\mathcal{S}$) sind
- $\forall x \varphi$ (**universelle Quantifikation**)
wobei $x \in \mathcal{V}$ ein Variablensymbol und φ eine Formel über $\mathcal{S}$ ist

Prädikatenlogik – Formeln (Fortsetzung)

- $\exists x \varphi$ (**existentielle Quantifikation**)
wobei $x \in \mathcal{V}$ ein Variablensymbol und φ eine Formel über $\mathcal{S}$ ist
- $\top, \perp$ (**Wahrheit, Falschheit**)
- $\neg \varphi$ (**Negation**) wobei φ eine Formel über $\mathcal{S}$ ist
- $(\varphi \wedge \psi)$ (**Konjunktion**)
- $(\varphi \vee \psi)$ (**Disjunktion**)
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ (**Voraussetzung**)
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ (**gegenseitige Bedingung**)
wobei φ und ψ Formeln über $\mathcal{S}$ sind

Syntax: Beispiele aus Arithmetik und Verwandtschaft

- $\text{Positiv}(x_2)$
- $\forall x \text{Quadratzahl}(x) \rightarrow \text{Positiv}(x)$
- $\exists x_3 \text{Quadratzahl}(x_3) \wedge \neg \text{Positiv}(x_3)$
- $\forall x (x = y)$
- $\forall x (\text{summe}(x, x) = \text{produkt}(x, \text{ein}))$
- $\forall x \exists y (\text{summe}(x, y) = \text{null})$
- $\forall x \exists y \text{Eltern}(y, x) \wedge \text{Weiblich}(y)$

Syntax-Konventionen

Konvention: Wenn Klammern weggelassen werden, binden $\forall$ und $\exists$ weniger stark als alles andere.

$\rightsquigarrow \forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ steht für $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$,
und nicht für $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$.

Vereinfachung: Eine Sequenz von Quantoren der selben Art kann zusammengefasst werden.

$$\forall x \forall y \forall z \varphi \rightsquigarrow \forall xyz \varphi \qquad \forall x_3 \forall x_1 \exists x_2 \exists x_5 \varphi \rightsquigarrow \forall x_3 x_1 \exists x_2 x_5 \varphi$$

Manchmal werden auch Kommas und Doppelpunkt verwendet:

$$\forall x, y, z: \varphi \qquad \forall x_3, x_1 \exists x_2, x_5 \varphi$$

Terminologie

- **Grundterm:** Ein Term der **keine** Variablensymbole besitzt

Beispiele: null, summe(eins, eins), donald-duck

Gegenbeispiele: x_4 , produkt(x , null)

- Analog: **Grundatom**, **Grundformel**

Beispiel: $\text{Quadratzahl}(\text{null}) \vee \text{eins} = \text{null}$

Gegenbeispiel: $\exists x \text{ eins} = x$

Später (bei der Diskussion von “Interpretation”) werden wir Variablen konkrete Werte aus einer Domäne zuweisen. Dazu die Definition:

Eine **Variablenzuweisung** (für die Signatur $\mathcal{S}$ und Domäne D) ist eine Funktion $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow D$.

Freie und gebundene Variablen: Motivation

Betrachten eine Signatur mit den Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und die Formel

$$(\forall x_4 (\mathbf{R}(x_4, x_2) \vee \mathbf{f}(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 \mathbf{S}(x_3, x_2)$$

Fragen dazu:

- Welche Variable sind **“frei”**, können also zugewiesen werden?
- $\alpha(x_1), \alpha(x_5), \alpha(x_6), \alpha(x_7), \dots$ **sind ohne Belang** da diese Variablensymbole in der Formel nicht auftauchen
- $\alpha(x_4)$ ist ebenfalls nicht relevant: zwar erscheint dieses Symbol in der Formel, ist aber an einen Quantor **gebunden**
- $\leadsto$ nur die Zuweisung der **freien Variablen** x_2 und x_3 sind wichtig

Variablen eines Terms

Sei t ein Term. Die Menge der **Variablen** die in t auftreten, geschrieben $\text{vars}(t)$, ist wie folgt definiert:

- $\text{vars}(x) = \{x\}$ für Variablensymbole x
- $\text{vars}(c) = \emptyset$ für Konstantensymbole c
- $\text{vars}(f(t_1, \dots, t_k)) = \text{vars}(t_1) \cup \dots \cup \text{vars}(t_k)$
für Funktionsterme

Beispiel: $\text{vars}(\text{produkt}(x, \text{summe}(c, y))) =$

Freie und gebundene Variablen einer Formel

Sei φ eine logische Formel. Die Menge der **freien Variablen** von φ , geschrieben $\text{free}(\varphi)$, ist wie folgt definiert:

- $\text{free}(R(t_1, \dots, t_k)) = \text{vars}(t_1) \cup \dots \cup \text{vars}(t_k)$
- $\text{free}(t_1 = t_2) = \text{vars}(t_1) \cup \text{vars}(t_2)$
- $\text{free}(\top) = \text{free}(\perp) = \emptyset$
- $\text{free}(\neg\varphi) = \text{free}(\varphi)$
- $\text{free}(\varphi \wedge \psi) = \text{free}(\varphi \vee \psi) = \text{free}(\varphi \rightarrow \psi) = \text{free}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \text{free}(\varphi) \cup \text{free}(\psi)$
- $\text{free}(\forall x \varphi) = \text{free}(\exists x \varphi) = \text{free}(\varphi) \setminus \{x\}$ (“\” bedeutet “ohne”)

Beispiel: $\text{free}((\forall x_4 (R(x_4, x_2) \vee f(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 S(x_3, x_2)) =$

Geschlossene Formel/Satz

Eine Formel φ mit keinen freien Variablen (i. e., $free(\varphi) = \emptyset$) nennt man eine **geschlossene Formel**, oder auch **Satz**.

Formeln mit mindestens einer freien Variablen heissen **offen**.

Beispiele: Welche der folgenden Formeln sind Sätze?

- $\text{Block}(b) \vee \neg \text{Block}(b)$
- $\text{Block}(x) \rightarrow (\text{Block}(x) \vee \neg \text{Block}(y))$
- $\text{Block}(a) \wedge \text{Block}(b)$
- $\forall x (\text{Block}(x) \rightarrow \text{Red}(x))$

Prädikatenlogik – Modell/Interpretation

Wie bei der Aussagenlogik benötigen wir eine *Interpretation* (der Variablen, neu auch der Funktionen und Prädikate), die einem Ausdruck den Wert “wahr” zuweisen kann.

Bei der Aussagenlogik hatten wir uns für Tautologien interessiert, die bei *jedem* Modell (Interpretation) wahr sind.

→ logisch wahre Formeln.

- *In der Prädikatenlogik hängt die Wahrheit eines Ausdrucks von der “Domäne” ab, aus welcher den Variablen Objekte zugewiesen werden. Diese Variablenzuweisung α ist nun auch Teil der Interpretation.*

Prädikatenlogik – Modell (Forts)

Beispiel:

Gegeben Prädikat A , Funktion f , Konstante a , eine Interpretation über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

A für “kleiner-gleich”

$f(x)$ Nachfolger ($x+1$)

a für die Zahl 0

Dann gilt $\forall x A(x, f(x))$, oder auch $\forall x A(0, x)$

Die letzte Aussage stimmt nicht für eine Interpretation über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. z.B. $A(0, x)$ falsch für einige $x \in \mathbb{Z}$

Prädikatenlogik – Axiome

“Interpretations-Diskussion” zeigt, dass gewisse Aussagen modellabhängig sind. Ansatz:

- Satz von Axiomen und Ableitungsregeln bestimmen, die universell gültig sind (wie in der Aussagenlogik)
→ 5 logische Axiome und 2 Inferenz-Regeln
- Zusätzlicher Satz von Axiomen, der Domänenabhängig ist.
z.B. Axiome für $\mathbb{N}$ etc

Modellunabhängiger Teil wird “Prädikatenlogik erster Stufe” genannt.
(*“First-order predicate calculus”, oder auch “First-order logic”*)

Prädikatenlogik – Logische Axiome (Schematas)

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
4. $(\forall x A(x)) \rightarrow A(t)$
falls “Term t frei für x in V ”
5. $(\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$
falls “ x tritt in V nicht frei auf”

Prädikatenlogik – Inferenz-Regeln

1. Modus ponens

$$\frac{A, A \implies B}{B}$$

2. Generalisierung

$$\frac{A}{\forall x A}$$

unabhängig davon, ob x in A vorkommt oder nicht.

Prädikatenlogik – Zusätzliche logische Aequivalenzen

Zusätzlich zu den Aequivalenzen der Aussagenlogik gelten u.a.:

$$(\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$$

$$(\forall x\varphi) \vee (\forall x\psi) \models \forall x(\varphi \vee \psi)$$

aber nicht umgekehrt

$$(\forall x\varphi) \wedge \psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$$

falls $x \notin \text{free}(\psi)$

$$(\forall x\varphi) \vee \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$$

falls $x \notin \text{free}(\psi)$

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists x\varphi) \wedge (\exists x\psi)$$

aber nicht umgekehrt

$$(\exists x\varphi) \vee \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$$

falls $x \notin \text{free}(\psi)$

$$(\exists x\varphi) \wedge \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$$

falls $x \notin \text{free}(\psi)$

$$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$$

Prädikatenlogik – Eigenschaften

Ausgehend von den Axiomen (logisch und modell-spezifisch) können Theoreme F abgeleitet werden. Schreibweise: $S \vdash F$

- Eine Prädikatenlogik ist **konsistent**, wenn für keine Formel F gleichzeitig F und $\neg F$ ein Theorem ist.
- Eine Prädikatenlogik ist **vollständig**, wenn für jede abgeschlossene Formel F entweder

$$S \vdash F$$

oder

$$S \vdash \neg F$$

gilt.

Prädikatenkalkül – Arithmetik

Peano hat Ende 19. Jahrhundert eine Axiomatik “ PA ” für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ entwickelt.

Nochmalige Vorwegnahme von Gödels Unvollständigkeitssatz:

- PA hat ein Modell (nämlich $\mathbb{N}$) und ist *konsistent*
- PA ist *unvollständig*, d.h.
es gibt eine Formel F für die weder “ $\vdash F$ ” noch “ $\vdash \neg F$ ”

Prädikatenkalkül – Arithmetik (Forts)

Wie kann eine “weder beweis- noch nicht-beweisbare” Formel erzeugt werden?

Grundidee: eine Formel F konstruieren, die ihre eigene Unbeweisbarkeit postuliert.

- Wenn F wahr ist, dann muss F unbeweisbar sein, d.h. wir haben tatsächlich Unvollständigkeit.
- Wenn sie falsch ist, dann gibt es einen Beweis für F . Dann ist F aber wahr im Modell, d.h. Widerspruch.

Nachbemerkung: Es kann bewiesen werden, dass zusätzliche Axiome die Peano-Arithmetik nicht vollständig machen können.

Zusammenfassung

- **Prädikatenlogik** ist eine reichere Logik als die Aussagenlogik. Sie erlaubt uns Schlüsse zu **Objekten** und ihren **Eigenschaften** zu ziehen.
- Objekte werden durch **Terme** bezeichnet, die aufgebaut sind aus Konstanten und Funktionssymbolen.
- Eigenschaften werden durch **Formeln** ausgedrückt, die Prädikate, Quantoren und die üblichen logischen Konnektoren beinhalten.
- Wie bei der Aussagenlogik analysieren wir:
 - **Syntax**: was ist eine wohlgeformte Formel?
 - **Semantik**: wie interpretieren wir eine Formel?
Ist Inhalt der nächsten Vorlesungsstunde.
 - **Schlussregeln**: Wie logische Schlüsse aus einer Wissensbasis ziehen?