

“Theorie der Informatik” (CS206)

Aussagenlogik

4. März 2013

Proff Malte Helmert und Christian Tschudin

Departement Mathematik und Informatik, Universität Basel

Einstiegsfragen

1. Was ist Meta-Mathematik?
2. Was ist eine Potenzmenge?
3. Wie beschreibt man einen Graphen?
4. Was ist eine “reductio ad absurdum”?

Warum Logik?

- Formalisieren von **korrektem Schlussfolgern**
- Ueberall in Mathematik und Informatik eingesetzt
- Grundlage vieler Werkzeuge der Informatik

Beispiele von Schlussfolgerungen – Welche sind korrekt?

- Wenn es Sonntag ist, muss ich nicht arbeiten.
Es ist Sonntag.
Deshalb muss ich nicht arbeiten.
- Es wird regnen oder schneien.
Es ist zu warm fürs Schneien.
Deshalb wird es regnen.
- Der Butler ist schuldig oder das Hausmädchen ist schuldig.
Das Hausmädchen ist schuldig oder der Koch ist schuldig.
Deshalb ist entweder der Butler oder der Koch schuldig.

Logik – Was es dazu braucht

Welche Form müssen logischen Aussagen haben? $\leadsto$ **Syntax**

Was bedeutet eine logische Aussage, wann wahr? $\leadsto$ **Semantik**

Wann folgt eine logische Aussage aus einer anderen? $\leadsto$ **Inferenz**

Zwei (aus vielen!) Logiken:

- **Aussagen**logik (propositional logic)
- **Prädikaten**logik (first-order, or predicate logic)

(Semiotik: Lehre der Zeichen – wie wird Bedeutung zugewiesen)

Bausteine der Aussagenlogik

Aussage = Satz, der entweder wahr oder falsch sein kann.

Bausteine:

- atomare Formeln
- Konnektoren

Atomare Formeln sind unteilbare Aussagen.

Beispiele: “Der Koch ist schuldig.” / “Es regnet.” / “Das Buch ist nass.”

Aus atomaren Formeln mit Konnektoren neue Formeln bauen.

Beispiele: “und” / “oder” / “nicht” / “ $\rightarrow$ ” / ...

Grundfragen der Logik - Es gilt herauszufinden:

- Wann ist eine (aussagelogische) Formel **wahr**?
- Wann folgt aus einer gegebenen Wissensbasis (WB, =Menge von Formeln) **logisch** eine neue Formel?
 - symbolisch: $WB \models \varphi$ falls “WB impliziert φ ”
- Wie kann man einen **Inferenz-Mechanismus** ($\approx$ Beweisverfahren) definieren, um systematisch alle Schlussfolgerungen aus einer Wissensbasis zu ziehen?
 - symbolisch: $WB \vdash \varphi$ falls “ φ kann aus WB abgeleitet werden”
- $\exists$ Inferenz-Mechanismus so, dass “ $WB \models \varphi$ iff $WB \vdash \varphi$ ” ?

Syntax der Aussagenlogik (“wohlgeformte Ausdrücke”)

Gegeben: endliche (oder abzählbare) Menge Σ von **Atomen** $p, q, r, \dots$

Eine aussagelogische Formel ist induktiv (rekursiv) definiert als

$p \in \Sigma$	atomare Formel
$\top$	Wahrheit
$\perp$	Falschheit
$\neg\varphi$	Negation
$(\varphi \wedge \psi)$	Konjunktion
$(\varphi \vee \psi)$	Disjunktion
$(\varphi \rightarrow \psi)$	Voraussetzung
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	gegenseitige Bedingung

wobei φ und ψ aussagelogische Formeln sind.

Terminologie und Notationen

Atom/atomare Formel (p)

Literal: Atom, oder negiertes Atom ($p, \neg p$)

Klausel: Disjunktion von Literalen ($p \vee \neg q, p \vee q \vee r, p$)

Klammern können gemäss folgenden Regeln weggelassen werden:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
- $p \wedge q \wedge r \wedge s \dots$ wird gelesen als $(\dots(((p \wedge q) \wedge r) \wedge s) \wedge \dots)$
- $p \vee q \vee r \vee s \dots$ wird gelesen als $(\dots(((p \vee q) \vee r) \vee s) \vee \dots)$

Die äussersten Klammern können immer weggelassen werden.

Alternative Notationen

Unsere Notation	Alternative Notationen		
$\neg \varphi$	$\sim \varphi$	$\overline{\varphi}$	
$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \& \psi$	φ, ψ	$\varphi \cdot \psi$
$\varphi \vee \psi$	$\varphi \mid \psi$	$\varphi ; \psi$	$\varphi + \psi$
$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \supset \psi$	
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\varphi \equiv \psi$	

Bedingte Programmausführung und Logikformel

Beispiel:

```
if (!A) then
    stmt1;
else if (!B || !C) then
    stmt2;
else
    stmt3;
```

Drücke mit einer aussagelogischen Formel aus, wann `stmt3` ausgeführt wird. (A, B und C sind die Atome)

Semantik der Aussagenlogik - Zuweisung von Wahrheit

Eine **Wahrheitszuweisung** (Belegung) der Atome in Σ ,
auch “**Interpretation** über Σ ” genannt,
ist eine Funktion $I : \Sigma \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$

Die Idee ist nun, von der (zugewiesenen) Wahrheit von Atomen zur Wahrheit ganzer aussagelogischen Formeln zu schreiten.

Auch hier ein induktiver Ansatz.

Semantik der Aussagenlogik – Erfüllbarkeit/Wahrheit

Interpretation I **erfüllt** φ (alternativ: φ **ist wahr** unter I), in Symbolen “ $I \models \varphi$ ” geschrieben, entsprechend den folgenden induktiven Regeln: (iff=gdw)

$$I \models p \quad \text{iff } I(p) = \mathbf{T} \quad \text{for } p \in \Sigma$$

$$I \models \top \quad \text{immer (d.h. für alle } I)$$

$$I \models \perp \quad \text{nie (d.h. für kein } I)$$

$$I \models \neg\varphi \quad \text{iff } I \not\models \varphi$$

$$I \models \varphi \wedge \psi \quad \text{iff } I \models \varphi \text{ und } I \models \psi$$

$$I \models \varphi \vee \psi \quad \text{iff } I \models \varphi \text{ oder } I \models \psi$$

$$I \models \varphi \rightarrow \psi \quad \text{iff } I \not\models \varphi \text{ oder } I \models \psi$$

$$I \models \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{iff } (I \models \varphi \text{ und } I \models \psi) \text{ oder } (I \not\models \varphi \text{ und } I \not\models \psi)$$

Semantik der Aussagenlogik: Beispiel

Beispiel

$$\Sigma = \{p, q, r, s\}$$

$$I = \{p \mapsto \mathbf{T}, q \mapsto \mathbf{F}, r \mapsto \mathbf{F}, s \mapsto \mathbf{T}\}$$

$$\varphi = ((p \vee q) \leftrightarrow (r \vee s)) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s))$$

Frage: gilt $I \models \varphi$?

Modell

Eine Interpretation I wird **Modell** einer Formel φ genannt, falls $I \models \varphi$.

Eine Interpretation I wird **Modell** einer Menge von Formeln WB genannt, falls sie ein Modell aller Formeln $\varphi \in WB$ ist.

Aussagenlogik – Erfüllbar, Tautologie

Eigenschaften von aussagelogischen Formeln

Eine Formel φ ist

- **erfüllbar** falls es ein Modell von φ gibt
- **unerfüllbar** falls es kein Modell von φ gibt
- **gültig**/eine **Tautologie** falls alle Interpretationen Modelle von φ sind
- **falsifizierbar**/widerlegbar falls sie keine Tautologie ist.

Bem.: Alle gültigen Formeln sind erfüllbar.

Alle unerfüllbaren Formeln sind falsifizierbar.

Logische Aequivalenz

Zwei Formulen φ und ψ sind **logisch äquivalent**,
geschrieben $\varphi \equiv \psi$,
falls die gleichen Modellmengen haben.

Mit anderen Worten:

$\varphi \equiv \psi$ trifft zu, falls für alle Interpretationen I gilt,
dass “ $I \models \varphi$ iff $I \models \psi$ ”.

Wahrheitstabelle

Wie können wir entscheiden, ob eine Formel “erfüllbar”, “gültig” etc
ist? Einfacher Ansatz: erzeuge eine **Wahrheitstabelle**, inspiziere sie.

Eine typische Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Wahrheitstabelle – Beispiel

Frage: Ist $((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$ gültig?

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$	$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$
F	F	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	T
T	T	T	F	T

φ ist wahr für alle möglichen Wahrheitswertkombinationen

$\leadsto$ alle Interpretationen sind Modelle

$\leadsto \varphi$ ist **gültig** (Tautologie)

Analog für “erfüllbar”, “unerfüllbar”, “falsifizierbar”, “logische Aequivalenz”.

Einige wichtige Aequivalenzen

Idempotenz $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

Kommutativität $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

Assoziativität $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Absorption $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$

$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$$

Distribution $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Einige wichtige Aequivalenzen (Forts.)

De Morgan $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Doppelte Negation $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

($\rightarrow$)-Elimination $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

($\leftrightarrow$)-Elimination $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Die “De Morgan”-Aequivalenz wird im Informatiker-Alltag sehr häufig verwendet!

Substitution

Theorem 0.1.

Seien φ und ψ zwei äquivalente Formeln, d.h. $\varphi \equiv \psi$.

Sei χ eine Formel in welcher φ als Teilformel erscheint, und sei χ' die Formel die aus χ entsteht durch Substitution von φ durch ψ .

Dann gilt $\chi \equiv \chi'$.

Beispiel: $p \vee \neg(q \vee r) \equiv p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

wegen De Morgans Regel und Substitution.

Aequivalenzen: Anwendungsbeispiel 1

Ausdrücke können vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} & p \wedge (\neg q \vee p) \\ \equiv & (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge p) && \text{(Distribution)} \\ \equiv & (p \wedge \neg q) \vee p && \text{(Idempotenz)} \\ \equiv & p \vee (p \wedge \neg q) && \text{(Kommutativität)} \\ \equiv & p && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

Aequivalenzen: Anwendungsbeispiel 2

$$\begin{aligned} & p \leftrightarrow q \\ \equiv & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && ((\leftrightarrow)\text{-Elimination}) \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) && ((\rightarrow)\text{-Elimination}) \\ \equiv & ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p) && \text{(Distribution)} \\ \equiv & (\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee (p \wedge (\neg p \vee q)) && \text{(Kommutativität)} \\ \equiv & ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee \\ & ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) && \text{(Distribution)} \\ \equiv & ((\neg q \wedge \neg p) \vee \perp) \vee (\perp \vee (p \wedge q)) && (\varphi \wedge \neg \varphi \equiv \perp) \\ \equiv & (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) && (\varphi \vee \perp \equiv \varphi \equiv \perp \vee \varphi) \end{aligned}$$

Normalformen

Problem: Wahrheitstabelle aufstellen ist aufwendig.

↪ Hat eine Formel n Atome, gibt es 2^n mögliche Belegungen, d.h. entsprechend viele Zeilen in der Wahrheitstabelle.

Kann aus der *Struktur* der Formel abgelesen werden, ob sie gültig ist, ohne alle Belegungen untersuchen zu müssen?

Hoffnung: ↪ Formeln so in “Normalformen” bringen, dass gewisse Eigenschaften direkt abgelesen werden können.

Die Konjunktive Normalform

Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)** falls sie eine Konjunktion von Klauseln ist, d.h. falls sie die Form hat

$$\bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right),$$

wobei die l_{ij} -Terme Literale sind.

Theorem: Für jede Formel φ existiert eine logisch äquivalente Formel in KNF.

Bem.: Eine KNF-Formel ist gültig genau dann wenn jede ihrer (disjunktiven) Klauseln gültig ist.

Disjunktive Normalform

Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)** falls sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h. sie die Form hat

$$\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right),$$

wobei die l_{ij} -Terme Literale sind.

Theorem: Für jede Formel φ existiert eine logisch äquivalente Formel in DNF.

Bem.: Eine DNF-Formel ist erfüllbar genau dann wenn mindestens eine der Konjunktionen erfüllbar ist.

KNF- und DNF-Beispiele

Beispiel

- $(p \vee \neg q) \wedge p$ ist in KNF
- $(r \vee q) \wedge p \wedge (r \vee s)$ ist in KNF
- $p \vee (\neg q \wedge r)$ ist in DNF
- $p \vee \neg q \rightarrow p$ ist weder in KNF noch in DNF
- p ist in KNF und DNF

Erzeugen der KNF

Algorithmus, um die KNF zu finden

1. Entferne alle $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ mittels der ($\rightarrow$)- und ($\leftrightarrow$)-Elimination.
 $\leadsto$ Formelstruktur: nur noch $\vee$, $\wedge$, $\neg$
2. Schiebe Negationen nach innen mittels De Morgan und Doppelter Negation.
 $\leadsto$ Formelstruktur: nur noch $\vee$, $\wedge$, Literale
3. Verteile $\vee$ über $\wedge$ mittels Distribution (und, genau genommen, auch Kommutativität).
 $\leadsto$ Formelstruktur: KNF
4. Optional: vereinfache (z.B. mittels Idempotenz)

Bem.: Analog für DNF, wobei Schritt 3) lautet: "verteile $\wedge$ über $\vee$ ".

Erzeugen der KNF – Beispiel

Gegeben: $\varphi = ((p \vee r) \wedge \neg q) \rightarrow p$

$\varphi \equiv \neg((p \vee r) \wedge \neg q) \vee p$	Schritt 1
$\equiv (\neg(p \vee r) \vee \neg\neg q) \vee p$	Schritt 2
$\equiv ((\neg p \wedge \neg r) \vee q) \vee p$	Schritt 2
$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q)) \vee p$	Schritt 3
$\equiv (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee q \vee p)$	Schritt 3
$\equiv \top \wedge (\neg r \vee q \vee p)$	Schritt 4
$\equiv \neg r \vee q \vee p$	Schritt 4

Logische Implikation

Eine Menge von Formeln (Wissensbasis WB) stellt meistens eine **unvollständige** Beschreibung der Welt dar, d.h. lässt den Wahrheitswert einiger Aussagen offen.

Beispiel: Die Wissensbasis $WB = \{p \vee q, r \vee \neg p, s\}$ ist bezüglich s definiert, lässt aber den Wert von p , q , und r offen, zumindest teilweise(!)

Modelle für die obige WB:	p	q	r	s
	F	T	F	T
	F	T	F	T
	T	F	T	T
	T	T	T	T

In allen Modellen ist $q \vee r$ wahr. Deshalb ist “ $q \vee r$ ” **logisch** durch WB **impliziert**, man sagt auch: ist **logische Konsequenz** von WB, symbolisch somit “ $WB \models q \vee r$ ”.

Logische Implikation: formal

Definition:

Sei WB eine Menge von aussagelogischen Formeln und φ auch eine aussagelogische Formel.

Dann sagen wir “**WB impliziert** φ ”

(“ φ **folgt logisch aus** WB”, “ φ ist **logische Konsequenz** von WB”, in Symbolen geschrieben als: $WB \models \varphi$)

falls alle Modelle von WB auch Modelle von φ sind.

Einige Eigenschaften der logischen Implikation

- **Deduktionstheorem:**

$$WB \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ gdw } WB \models \varphi \rightarrow \psi$$

- **Kontrapositionstheorem:**

$$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \text{ gdw } WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$$

- **Widerspruchstheorem:**

$$WB \cup \{\varphi\} \text{ ist unerfüllbar gdw } WB \models \neg\varphi$$

Beweis des Deduktionstheorems

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ gdw } WB \models \varphi \rightarrow \psi$

Beweis “ $\Rightarrow$ ”: Gegeben ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models \varphi \rightarrow \psi$, d.h. alle Modelle von WB erfüllen $\varphi \rightarrow \psi$. Sei I (irgend) eines dieser Modelle. Zwei Fälle:

- **Fall 1:** $I \models \varphi$.

Dann ist I ein Modell von $WB \cup \{\varphi\}$. Zudem gilt $I \models \psi$ wegen der Annahme für diesen Beweis, voraus folgt dass $I \models \varphi \rightarrow \psi$.

- **Fall 2:** $I \not\models \varphi$.

Dann können wir direkt schliessen dass $I \models \varphi \rightarrow \psi$.

... andere Beweisrichtung siehe nächste Seite

Beweis des Deduktionstheorems (Forts)

Beweis “ $\Leftarrow$ ”:

Vorausgesetzt/gegeben ist, dass $WB \models \varphi \rightarrow \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h. alle Modelle von $WB \cup \{\varphi\}$ erfüllen ψ . Betrachte solch ein Modell I .

$I \models \varphi$ gemäss Definition. Zudem, weil I ein Modell von WB ist, haben wir $I \models \varphi \rightarrow \psi$ wegen der Voraussetzung.

Zusammengenommen erhalten wir $I \models \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$, durch Aequivalenzumformung $I \models \varphi \wedge \psi$, woraus folgt dass $I \models \psi$.

Beweis des Kontrapositionstheorems

$$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \text{ gdw } WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$$

Wegen Deduktionstheorem gilt $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw $WB \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.

Ebenso aus gleichem Grund: $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw $WB \models \psi \rightarrow \neg\varphi$.

Zudem $\varphi \rightarrow \neg\psi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi \equiv \psi \rightarrow \neg\varphi$.

Zusammengesetzt erhalten wir die gewünschte Aussage:

$$\begin{aligned} &WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \\ \text{gdw } &WB \models \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \text{gdw } &WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi \end{aligned}$$

Frage:

Kann bestimmt werden ob $WB \models \varphi$ gilt

ohne alle Interpretationen untersuchen zu müssen?

(Wahrheitstabellen-Methode)

- Antwort: **Ja!** Es gibt mehrere Möglichkeiten dazu.
- Im folgenden betrachten wir Schlussregeln (**Inferenzregeln**), (Ableitungsregeln) die aussagelogische Formeln aus einer gegebenen Menge von aussagelogischen Formeln produzieren.
- Ein Satz von Inferenzregeln wird auch **Kalkül** oder **Beweissystem** genannt.

Inferenzregel, Axiom

Inferenzregeln werden in folgender Form dargestellt:

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}$$

was bedeutet, dass “falls $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ wahr ist, dann ist ψ auch wahr.”

Der Fall $k = 0$ ist erlaubt.

Solche Inferenzregeln werden **Axiome** genannt.

Wichtige aussagelogische Inferenzregeln

Modus ponens	$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
Modus tolens	$\frac{\neg\psi, \varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi}$
Und-Elimination	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
Und-Einführung	$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
Oder-Einführung	$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$
($\perp$) Elimination	$\frac{\perp}{\varphi}$
($\leftrightarrow$) Elimination	$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \varphi}$

Ableitung

Definition:

Eine **Ableitung** (oder “**Beweis**”) einer Formel φ aus einer Wissensbasis WB ist eine Sequenz von Formeln $\psi_1, \dots, \psi_k$ so dass

- $\psi_k = \varphi$ und
- für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt:
 - $\psi_i \in \text{WB}$, oder
 - ψ_i ist das Resultat der Anwendung einer Inferenzregeln auf ausgewählten Elemente aus $\{\psi_1, \dots, \psi_{i-1}\}$.

Notation: $\text{WB} \vdash \varphi$ heisst “ φ kann aus WB abgeleitet werden”

Beispiel einer Ableitung

Sei $WB = \{p, p \rightarrow q, p \rightarrow r, q \wedge r \rightarrow s\}$.

Ableitung von $s \wedge r$ aus WB?

1. p (WB)
2. $p \rightarrow q$ (WB)
3. q (1, 2, modus ponens)
4. $p \rightarrow r$ (WB)
5. r (1, 4, modus ponens)
6. $q \wedge r$ (3, 5, Und-Einführung)
7. $q \wedge r \rightarrow s$ (WB)
8. s (6, 7, modus ponens)
9. $s \wedge r$ (8, 5, Und-Einführung)

Zusammenfassung Aussagenlogik

- **Logiken** sind mathematische Ansätze, um das Schlussfolgern zu formalisieren.
- Die **Aussagenlogik** handelt von Wahr/Falsch-Aussagen und ist für Informatik speziell relevant.
- Drei Komponenten finden wir bei allen Logiken:
 - **Syntax** – formalisiert wie ein (wohlgeformter) Ausdruck aussehen muss.
 $\leadsto$ Atome, Konnektoren, Formeln, ...
 - **Semantik** – formalisiert, was solche Ausdrücke bedeuten.
 $\leadsto$ Interpretation, Modell, erfüllbar, gültig (Tautologie), ...
 - **Kalkül** (Beweissystem) – liefert formale Regeln um Schlüsse aus einer Menge gegebener Formeln zu ziehen.
 $\leadsto$ Inferenzregeln, Ableitung