

Theorie der Informatik (CS 206)

Prof. Dr. M. Helmert, Prof. Dr. C. Tschudin
Dr. M. Wehrle
Frühjahrssemester 2013

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 10

Abgabe: 15. Mai

Aufgabe 10.1 (Allgemeine vs. Entscheidungsprobleme, 2+2 Punkte)

Eine *Knotenüberdeckung* (Vertex Cover) eines ungerichteten Graphen $G = \langle V, E \rangle$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass für jede Kante des Graphen mindestens ein Endpunkt in S liegt (für alle $e = \{v_1, v_2\} \in E$ gilt $e \cap S \neq \emptyset$). Betrachten Sie folgenden Problemdefinitionen.

$\mathcal{P}$: Optimierungsproblem VERTEXCOVEROPT

- Eingabe: ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$
- Ausgabe: eine Knotenüberdeckung von G minimaler Grösse

$\mathcal{E}$: Entscheidungsproblem VERTEXCOVER

- Eingabe: ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$, Kostenschranke $K \in \mathbb{N}_0$
- Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung von G mit $\leq K$ Knoten?

Zeigen Sie, dass die Probleme $\mathcal{P}$ und $\mathcal{E}$ aufeinander zurückgeführt werden können. Zeigen Sie hierzu, dass man aus einem polynomiellen Algorithmus zur Lösung von $\mathcal{P}$ einen polynomiellen Algorithmus zur Lösung von $\mathcal{E}$ konstruieren kann und umgekehrt.

Aufgabe 10.2 (Nichtdeterministische Algorithmen, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass VERTEXCOVER aus Aufgabe 10.1 mit einem nichtdeterministischen Algorithmus in polynomieller Zeit entschieden werden kann. Geben Sie hierzu einen nichtdeterministischen Algorithmus an und begründen Sie, warum er korrekt ist und polynomielle Laufzeit hat.

Aufgabe 10.3 (Nichtdeterministische Turingmaschinen, 4 Punkte)

Wir nennen eine natürliche Zahl *zerlegbar*, wenn sie das Produkt zweier natürlicher Zahlen grösser oder gleich zwei ist. Wir definieren die Menge der zerlegbaren Zahlen formal wie folgt:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } m, k \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq 2 \text{ und } k \geq 2, \text{ sodass } n = m \cdot k\}$$

Geben Sie eine nichtdeterministische Turingmaschine über dem Alphabet $\Sigma = \{ |, \# \}$ an, welche die Sprache der zerlegbaren Zahlen (kodiert als Unärzahl) akzeptiert. Als Eingabe wird die Anzahl der Striche $|$ als natürliche Zahl interpretiert. Der Lesekopf befindet sich am Anfang auf dem ersten Strich der Eingabe. Sie müssen keine formale Konstruktion Ihrer Turingmaschine angeben. Es genügt, Ihre Konstruktionsidee präzise zu beschreiben.

Aufgabe 10.4 (*Bonusaufgabe*: Polynomielle Reduktion, 4 Bonuspunkte)

Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem SETCOVER.

- Eingabe: Eine Menge M , eine Menge von Teilmengen (d.h. $S_1, \dots, S_n$, $S_i \subseteq M$ für $i = 1, \dots, n$) und eine natürliche Zahl $k \leq n$.
- Frage: Gibt es eine Auswahl von k Teilmengen $S_{j_1}, \dots, S_{j_k}$ in der bereits alle Elemente aus M vorkommen? (d.h. $S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_k} = M$)

Zeigen Sie, dass das VERTEXCOVER Problem aus Aufgabe 10.1 polynomiell auf SETCOVER reduzierbar ist (d.h., $\text{VERTEXCOVER} \leq_p \text{SETCOVER}$).

Hinweis: Dies ist das letzte Hausaufgabenblatt der Vorlesung. Die Bonusaufgabe wird mit dem Stoff lösbar sein, der am kommenden Mittwoch behandelt wird.