Theorie der Informatik (CS 206)

Prof. Dr. M. Helmert, Prof. Dr. C. Tschudin — Universität Basel
Dr. M. Wehrle — Fachbereich Informatik
Frühjahrssemester 2013

Übungsblatt 7

Abgabe: 24. April

Bei diesem Blatt handelt es sich um Übungen zu regulären und kontextfreien Sprachen, die der Wiederholung der entsprechenden Vorlesungsteile dienen. Weitere Wiederholungsübungen zu diesen Themen werden in den Präsenzübungen angeboten.

Aufgabe 7.1 (Reguläre Ausdrücke, 1+1+1+1 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ auf jedes } a \text{ in } w \text{ folgt direkt ein } b\ \}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid\ w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid\ w \text{ enthält das Teilwort } bb \text{ nicht}\}$

(d) Sprache der Wörter mit einer geraden Anzahl b's am Ende:

$$L_4 = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die Länge des längsten Suffixes von } w \text{ welches nur} \\ \text{aus } b\text{'s besteht, ist gerade} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 7.2 (Untersuchung von Sprachen auf Regularität, 1+3 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche der folgenden Sprachen ist regulär? Beweisen Sie Ihre Aussagen. Geben Sie als Beweis, dass eine Sprache regulär ist, einen DFA an, der die Sprache erkennt. Verwenden Sie das Pumping Lemma, um zu zeigen, dass eine Sprache *nicht* regulär ist.

(a) Sprache der einbuchstabigen a-Wortpaare gleicher Länge.
$L_1 = \{a^n a^n \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(b) Sprache der einbuchstabigen a-Wortpaare gleicher Länge, die durch ein b getrennt sind.
$L_2 = \{a^n b a^n \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Aufgabe 7.3 (Kontextfreie Grammatik, 2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Sprache der *Palindrome*

$$\mathcal{L}_{Pal} = \{w_0 w_1 \ldots w_n \in \Sigma^* \mid \text{für alle } i = 0, \ldots, n \text{ gilt } w_i = w_{n-i}\}$$

über dem zweibuchstabigen Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ an, die $\mathcal{L}_{Pal}$ erzeugt und nur eine Variable enthält (d.h. $|V| = 1$).

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $L(G) = \mathcal{L}_{Pal}$ gilt.

Zur Erinnerung: Um zu zeigen, dass zwei Mengen A und B identisch sind, müssen Sie zwei Richtungen zeigen: Einerseits muss jedes Element aus A auch in B liegen (“$A \subseteq B$”), andererseits muss jedes Element aus B auch in A liegen (“$B \subseteq A$”).

Für diese Aufgabe bedeutet das: Sie müssen zeigen, dass jedes von Ihrer Grammatik aus a) erzeugte Wort ein Palindrom ist, und dass jedes existierende Palindrom auch mit Ihrer Grammatik abgeleitet werden kann. Zeigen Sie beide Richtungen separat durch vollständige Induktion.