Theorie der Informatik (CS 206)

Prof. Dr. M. Helmert, Prof. Dr. C. Tschudin
Dr. M. Wehrle
Frühjahrssemester 2013

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: 13. März

Aufgabe 1.1 (Mengen, 2+2 Punkte)

Sei $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{-m \mid m \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ganzen Zahlen. Betrachten Sie die Mengen von Tupeln $M_1 := \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a|b\}$ und $M_2 := \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b|a\}$. Zur Erinnerung: $a|b$ ("a ist Teiler von b"), wenn es eine ganze Zahl k gibt, sodass $b = k \cdot a$.

(a) Bestimmen Sie die Menge $M_1 \cap M_2$. Geben Sie eine Menge M mit $|M| = 3$ explizit an, sodass $M \subseteq (M_1 \cap M_2)$ gilt.

(b) Betrachten Sie die Menge $M_3 := \{\langle 1, c\rangle \mid c \in \mathbb{N}\}$. Gilt $M_3 \subseteq M_1$? Gilt $M_3 \subseteq M_2$? Gilt $M_3 \subseteq (M_1 \cap M_2)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.2 (Aussagenlogik, 2+2 Punkte)

Betrachten Sie die Formel $\Phi = ((A \lor B) \to C) \land \neg((C \lor B) \leftrightarrow A)$ und die Interpretation I mit $I = \{A \mapsto \mathbf{F}, B \mapsto \mathbf{T}, C \mapsto \mathbf{T}\}$.

(a) Zeigen Sie mit der Definition von $\models$ direkt, dass $I \models \Phi$.

(b) Stellen Sie eine Wahrheitstabelle für Φ auf. Ist Φ eine Tautologie? Ist Φ falsifizierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.3 (Aussagenlogik, 4 Punkte)

Betrachten Sie die Formel $\Phi = (A \leftrightarrow \neg B) \land \neg((C \lor B) \to A)$. Verwenden Sie die Äquivalenzen aus der Vorlesung und die Äquivalenzen $\psi \land \neg\psi \equiv \bot$ und $\psi \lor \bot \equiv \psi \equiv \bot \lor \psi$, um zu zeigen, dass $\Phi \equiv \neg A \land B$. Wenden Sie in jedem Schritt nur eine der Äquivalenzen an, mit Ausnahme der Assoziativität, die Sie auch implizit verwenden dürfen.

Aufgabe 1.4 (Freiwillige Aufgabe: Indirekter Beweis)

Geben Sie einen indirekten Beweis an, um die folgende Aussage zu zeigen: Es gibt keine natürlichen Zahlen a und b, sodass $a^2 - b^2 = 10$ gilt.